<u>Corrigé de la série de TD N°05 : Formulations intégrales</u>

1 Exercice N°01

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur t et modélisée, dans l'espace 2D muni d'un repère $(1,x,y)$, par un maillage composé d'un seul élément triangulaire à trois nœuds de type TRI3 (figure 06).

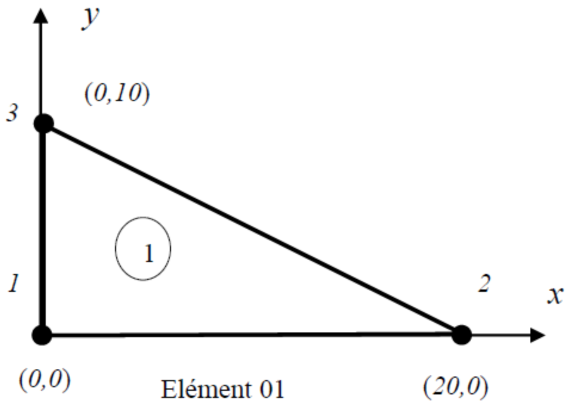

Figure 06 : paroi métallique mince de forme triangulaire

Sur le domaine occupé par cette paroi et noté Ω, on considère l'équation de transfert thermique suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2 = 0$$

Les conditions aux limites liées à cette équation sont comme suit :

- Une température nulle (T=0) est imposée sur le bord (2-3) noté Γ_D
- Un flux de chaleur nul $(\frac{\partial T}{\partial n} = 0)$ est imposé sur les bords (1-2) et (1-3) notés Γ_F.

Afin de déterminer la distribution du champ scalaire de température *T(x,y)* dans cette paroi, il est demandé d'établir :

1- La forme intégrale forte du problème
2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine

<u>Solution</u> **:**

Soit le domaine Ω dont la frontière Γ est fermée telle que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$ $avec$ $\Gamma_D \cap \Gamma_F = \emptyset$ avec

- Γ_D: (bord 2-3) la zone où les températures ont été imposées et donc les fonctions de pondération $\langle\Psi\rangle$ nulles.
- Γ_F: (bords 1-2 et 1-3) la zone où les flux chaleur ont été imposés nuls.

1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème est :

$$W = \int_\Omega \Psi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2\right) dxdy = \int_\Omega \Psi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) dxdy + \int_\Omega \Psi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) dxdy + 2\int_\Omega \Psi\, dxdy = 0$$

2- Pour établir la forme intégrale faible du problème, on doit d'abord appliquer les formules Green en 2D qui ont été écrites dans les expressions (7-10) et (7-11) du paragraphe 3.3 pour chaque terme de l'équation précédente comme suit :

$$\iint_{\Omega} \Psi(x,y).\left(\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}\right)dx.dy = -\iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}.dx.dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x,y).\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}.n_x.dl$$

$$\iint_{\Omega} \Psi(x,y).\left(\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right)dx.dy = -\iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}.dx.dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x,y).\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}.n_y.dl$$

En remplaçant ces deux termes précédents par leurs expressions dans la forme intégrale forte de la question 1, on aura :

$$W = -\iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}.dx.dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x,y).\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}.n_x.dl$$
$$-\iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}.dx.dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x,y).\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}.n_y.dl + 2\int_{\Omega} \Psi\, dxdy$$
$$= 0$$

Donc

$$W = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right).dx.dy$$
$$+\oint_{\Gamma} \Psi(x,y).\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}.n_x + \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}.n_y\right).dl + 2\int_{\Omega} \Psi\, dxdy = 0$$

Or $\qquad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T(x,y)}{\partial x}.n_x + \frac{\partial T(x,y)}{\partial y}.n_y$

$$W = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right).dx.dy + \oint_{\Gamma} \Psi.\frac{\partial T}{\partial n}.dl + 2\int_{\Omega} \Psi\, dxdy = 0$$

Puisque :

$$\oint_{\Gamma} \Psi.\frac{\partial T}{\partial n}.dl = \oint_{\Gamma_D} \Psi.\frac{\partial T}{\partial n}.dl + \oint_{\Gamma_F} \Psi.\frac{\partial T}{\partial n}.dl$$

Or $\qquad \Psi = 0$ sur Γ_D et $\frac{\partial T}{\partial n} = 0\ sur\ \Gamma_F$

Par conséquent :

$$\oint_{\Gamma} \Psi.\frac{\partial T}{\partial n}.dl = 0$$

Et

$$W = -\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right).dx.dy + 2\int_{\Omega} \Psi(\mathrm{x},\mathrm{y})\, dxdy = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkine en posant que :

$$\Psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \delta T(x,y)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = -\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial(\delta T(x,y))}{\partial x}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta T(x,y))}{\partial y}.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right).dx.dy + 2\int_{\Omega}(\delta T(x,y)).dxdy = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons comme suit :

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}$$

On aura finalement :

$$W = -\iint_{\Omega}\left(\delta\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right).\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + \delta\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right).\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right).dx.dy + 2\int_{\Omega}(\delta T(x,y)).dxdy = 0$$

2 Exercice N°02

Soit l'équation différentielle suivante définie dans l'intervalle [1 2] comme suit :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 3.u = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1) = 0 \; et \; \frac{du}{dx}(2) = 0$$

Il est demandé d'établir :

1- La forme intégrale forte du problème
2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine

Solution **:**

Soit le domaine Ω =[1 2] qui est un intervalle 1D fermé

1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2} + 3.u(x)\right)dx = \int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx + 3\int_1^2 \Psi(x).u(x).dx = 0$$

2- Pour établir la forme intégrale faible du problème précédent, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (7-09) du paragraphe 3.3 uniquement pour le premier terme de l'équation précédente comme suit :

$$\int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + \left[\Psi(x).\frac{du(x)}{dx}\right]_1^2$$

Le second terme $\left(3\int_1^2 \Psi(x).u(x).dx\right)$ dont la fonction inconnue est $u(x)$ apparait explicitement (c'est-à-dire qu'elle n'est pas écrite sous forme de dérivée), ne nécessite aucune modification.

Par ailleurs, puisque $u(1) = 0$ donc la fonction $\Psi(x)$ est nulle en x=1 donc $\Psi(1) = 0$ et puisque $\frac{du}{dx}(2) = 0$, donc le terme $\left[\Psi(x).\frac{du(x)}{dx}\right]_1^2 = 0$

Par conséquent, la forme intégrale faible sera :

$$W = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + 3\int_1^2 \Psi(x).u(x).dx = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkine en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = -\int_1^2 \frac{d\big(\delta u(x)\big)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + 3\int_1^2 \delta u(x).u(x).dx = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons ici comme suit :

$$\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = -\int_1^2 \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right).\frac{du(x)}{dx}.dx + 3\int_1^2 \delta u(x).u(x).dx = 0$$

3 <u>Exercice N°03</u>

Soit un phénomène physique modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante définie dans l'intervalle [1 2] comme suit :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - 2x = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1) = u(2) = 0$$

Il est demandé d'établir :

1- La forme intégrale forte du problème
2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine

<u>Solution</u> **:**

1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - 2x\right)dx = \int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx + \int_1^2 \Psi(x).\frac{du(x)}{dx}.dx - 2\int_1^2 \Psi(x).x.dx = 0$$

2- Pour établir la forme intégrale faible du problème précédent, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l' expression (7-09) du paragraphe 3.3 uniquement pour les deux premiers termes de l'équation précédente comme suit :

$$\int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + \left[\Psi(x).\frac{du(x)}{dx}\right]_1^2$$

$$\int_1^2 \Psi(x).\frac{du(x)}{dx}.dx = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx}.u(x).dx + [\Psi(x).u(x)]_1^2$$

Or $\quad \Psi(1) = \Psi(2) = 0$ car $u(1) = u(2) = 0$

Ce qui implique que

$$\left[\Psi(x).\frac{du(x)}{dx}\right]_1^2 = [\Psi(x).u(x)]_1^2 = 0$$

Dans ce cas :

$$\int_1^2 \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx$$

$$\int_1^2 \Psi(x).\frac{du(x)}{dx}.dx = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx}.u(x).dx$$

Par conséquent, la forme intégrale faible sera :

$$W = -\int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} . dx - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} . u(x). dx - 2\int_1^2 \Psi(x). x. dx = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkine en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = \int_1^2 \frac{d\big(\delta u(x)\big)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} . dx + \int_1^2 \frac{d\big(\delta u(x)\big)}{dx} . u(x). dx + 2\int_1^2 \delta u(x). x. dx = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons comme suit :

$$\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = \int_1^2 \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right) \cdot \frac{du(x)}{dx} . dx + \int_1^2 \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right) . u(x). dx + 2\int_1^2 \delta u(x). x. dx = 0$$

4 Exercice N°04

Soit une barre de longueur L=100 cm de section transversale constante d'aire A = 1 cm^2. Cette barre est bloquée en déplacements à l'extrémité (x= 0). Elle est soumise à une force ponctuelle F=100 KN à l'autre extrémité (x = 100 cm). Le poids propre de cette barre est considéré comme négligeable.

1- Ecrire le problème sous forme d'une équation différentielle avec ses conditions aux limites
2- Etablir la forme intégrale forte du problème
3- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine
4- Retrouver cette forme intégrale faible en utilisant la méthode directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles.

Solution :

1- L'équation d'équilibre d'un élément infinitésimal de longueur dx est comme suit (voir la démonstration au paragraphe 5.1) :

$$E.A.\frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x) = 0$$

Or le poids propre est négligeable donc $q(x) = 0$

Ainsi l'équation différentielle devient

$$E.A.\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

Avec comme condition aux limites

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(100) = \frac{F}{EA} = \frac{100}{21000.1} = 4.762\,.10^{-3}$$

2- Forme intégrale forte du problème

En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_{0}^{100} \Psi(x).\left(E.A.\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx = 0$$

3- Pour établir la forme intégrale faible du problème, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (7-09) du paragraphe 3.3 comme suit :

$$W = E.A.\int_{0}^{100} \Psi(x).\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)dx = -\int_{0}^{100} \frac{d\Psi(x)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + \left[\Psi(x).\frac{du(x)}{dx}\right]_0^{100} = 0$$

Or $\Psi(0) = 0$ car $u(0) = 0$

Ce qui implique que

$$\left[\Psi(x).\frac{du(x)}{dx}\right]_0^{100} = \Psi(100).\frac{du(100)}{dx} - \cancel{\Psi(0).\frac{du(0)}{dx}} = 4.762\,.10^{-3}.\Psi(100)$$

On obtient ainsi

$$W = -\int_{0}^{100} \frac{d\Psi(x)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + 4.762\,.10^{-3}.\Psi(100) = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkine en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = -\int_{0}^{100} \frac{d\big(\delta u(x)\big)}{dx}.\frac{du(x)}{dx}.dx + 4.762\,.10^{-3}.\delta u(100) = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons comme suit :

$$\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = -\int_{0}^{100} \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right).\frac{du(x)}{dx}.dx + 4.762\,.10^{-3}.\delta u(100) = 0$$

4- Forme intégrale faible en utilisant la méthode directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles.

Rappelons ci-dessous la forme intégrale faible avec prise en compte de forces ponctuelles telle qu'écrite en (7-24) de manière générale pour les problèmes d'élasticité tridimensionnels :

$$W = -\int_{\Omega} (\langle\delta\varepsilon\rangle.\{\sigma\}).d\Omega + \int_{\Omega} \langle\delta U\rangle.\{F_V\}d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle\delta U\rangle.\{f_S\}d\Gamma + \sum_{i=1}^{m} \delta U_P^i.F_P^i = 0$$

Dans le cas de l'élément barre, les vecteurs $\langle\varepsilon\rangle$ et $\langle\sigma\rangle$ sont comme suit :

$$\langle\sigma\rangle = \langle\sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\rangle$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0\rangle$$

Par conséquent : $\langle\delta\varepsilon\rangle.\{\sigma\} = \delta\varepsilon_x.\sigma_x = E.\delta\varepsilon_x.\varepsilon_x = E.\delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right).\frac{du(x)}{dx}$

Ce qui implique : $-\int_\Omega (\langle\delta\varepsilon\rangle.\{\sigma\}).d\Omega = -E.A.\int_{x_1}^{x_2} \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\frac{du(x)}{dx}dx$ avec $d\Omega = A.dx$

Par ailleurs, les forces de volume ayant été négligées donc on a : $\{F_V\} = 0$. Ce qui implique :

$$\int_\Omega \langle\delta U\rangle.\{F_V\}d\Omega = 0$$

Concernant les deux forces ponctuelles F_1 et F_2, on a : $\sum_{i=1}^{2}\delta U_P^i.F_P^i = F_1.\delta u(x_1) + F_2.\delta u(x_2)$

Or $u(x_1) = 0 \Rightarrow \Psi(x_1) = 0 \Rightarrow puisque\ \Psi(x_1) = \delta u(x_1) \Rightarrow \delta u(x_1) = 0$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{2}\delta U_P^i.F_P^i = F_2.\delta u(x_2) = 100.\delta u(100)$$

Pour sa part, vu l'absence de forces surfaciques, on a : $\{f_S\} = 0$, ceci conduit à :

$$\oint_{\Gamma_F} \langle\delta U\rangle.\{f_S\}d\Gamma = 0$$

Finalement, avec cette seconde méthode, on retrouve la même expression de la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine que celle trouvée en (7-33)

$$W = -E.A.\int_{x_1}^{x_2} \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right).\frac{du(x)}{dx}dx + F_2.\delta u(x_2) = 0$$

$$W = -\int_{x_1}^{x_2} \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right).\frac{du(x)}{dx}dx + \frac{F_2}{E.A}.\delta u(x_2) = 0$$

On retrouve ainsi le même résultat que la réponse à la question 3 précédente :

$$W = -\int_0^{100} \delta\left(\frac{du(x)}{dx}\right).\frac{du(x)}{dx}.dx + 4.762\,.10^{-3}.\delta u(100) = 0$$