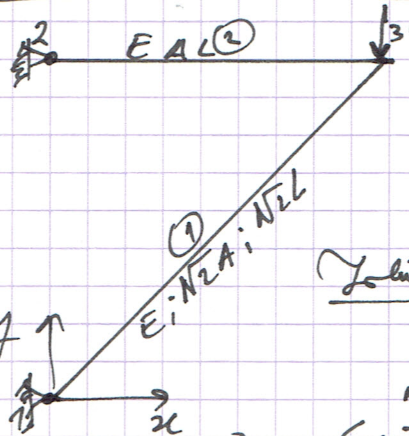
Série N° 07 :

Solution de l'exercice 01 (série N° 05)



$E = 210000\ \text{MPa}$ $L = 10\,m$

$A = 0{,}0001\,m^2$ et $F = 10\,kN$

Trouver u_{x_3} ; u_{y_3} et les efforts internes dans les barres.

Solution : Soit le repère global $(1, x, y)$

Le 1er consiste à résoudre le système d'équations $[K].\{U\} = \{F\}$ avec

$[K]$: matrice de rigidité globale écrite dans le repère global

$$U = \begin{Bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \end{Bmatrix}_{(6,1)} \quad \text{et} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{x_3} \\ F_{y_3} \end{Bmatrix}_{(6,1)} \quad \text{et} \quad [K] = \text{matrice } (6,6)$$

Considérons l'élément ① : La matrice $[K^1]$ écrite dans le repère global est

$$[K^1] = \begin{bmatrix} c^2 & s.c & -c^2 & -s.c \\ s.c & s^2 & -s.c & -s^2 \\ -c^2 & -s.c & c^2 & s.c \\ -s.c & -s^2 & s.c & s^2 \end{bmatrix} \times \frac{E.(\sqrt{2}A)}{\sqrt{2}.L}$$

or $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow [K^1] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \left(\frac{E A}{L}\right)$$

Considérons l'élément (2) : La matrice $[k^{(2)}]$ écrite dans le repère global $\varphi = 0$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{E \cdot A}{l} \right)$$

Faisons l'expansion de ces deux matrices.
l'élément (1) reliant les nœuds (1) et (3) manque le nœud (2)

$$k^{(1)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1/2 & +1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

manque le nœud (1)

$$k^{(2)^{d}} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Faisons la somme des 2 matrices tel que $(k) = (k^1) + (k^2)$.

$$[k] = \begin{bmatrix} 1/2 & +1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \left(\frac{EA}{l} \right)$$

Ecrivons les conditions aux limites $u_{x_1} = u_{y_1} = u_{x_2} = u_{y_2} = 0$

$F_{x_3} = 0$ et $F_{y_3} = -10$ kN

$$\Rightarrow \{U\} = \begin{Bmatrix} u_{x_1} \\ u_{y_1} \\ u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$\left(\frac{EA}{l}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine d'abord les déplacements u_{x_3} et u_{y_3}.

$$(5) \Rightarrow \cancel{\frac{EA}{l}}\left(\frac{3}{\cancel{2}} u_{x_3} + \frac{1}{\cancel{2}} u_{y_3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{u_{y_3} = -3 u_{x_3}}$$

$$(6) \Rightarrow \frac{EA}{l}\left(\frac{1}{2}\right)\left(u_{x_3} + u_{y_3}\right) = -10 \quad \text{or} \quad u_{y_3} = -3u_{x_3}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{l}\frac{1}{\cancel{2}}\left(-\cancel{2}u_{x_3}\right) = -10 \Rightarrow u_{x_3} = \frac{10 \cdot l}{EA}$$

<u>AN</u> : $u_{x_3} = \dfrac{10 \cdot 1000}{21000 \cdot 1} = \underline{\underline{0{,}476 \text{ cm}}}$.

$$\Rightarrow u_{y_3} = -3 \cdot (0{,}476) = \underline{\underline{-1{,}429 \text{ cm}}}.$$

$$(1) \Rightarrow F_{x_1} = \frac{1}{2}\left(-u_{x_3} - u_{y_3}\right) \cdot \frac{EA}{l} = \frac{1}{2}\left(-0{,}476 - (-1{,}429)\right)\frac{21000 \cdot 1}{1000}$$

$$\boxed{F_{x_1} = 10{,}00 \text{ kN}}$$

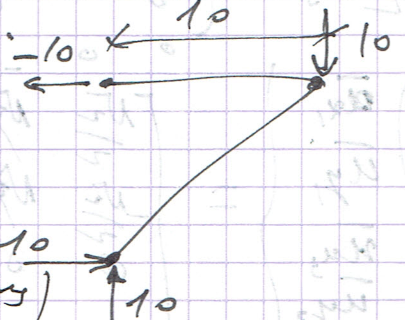
(2) $\Rightarrow F_{y_1} = \left(-\frac{1}{2} \cdot u_{x_3} - \frac{1}{2} \cdot u_{y_3}\right)\frac{EA}{l} = -\frac{EA}{2l}\left(u_{x_3} + u_{y_3}\right)$

$F_{y_1} = -\frac{21000 \cdot 1}{2 \cdot 1000}\left(0,476 - 1,429\right) = +10,00065\ kN \simeq +10,0\ kN$

$\Rightarrow \boxed{F_{y_1} = +10\ kN}$

(3) $\Rightarrow F_{x_2} = \left(-1 \times u_{x_3}\right)\frac{EA}{l} = -0,476 \cdot \frac{21000 \cdot 1}{1000}$

$F_{x_2} = -9,996 \simeq -10,00\ kN$



(4) $\Rightarrow F_{y_2} = 0\ kN \Rightarrow$

(Voir le verso pour la détermination des efforts internes)

Détermination de l'effort interne dans la barre (1) :

Soit $\langle U \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0{,}476 \quad -1{,}429 \rangle$, or élément (1) relie noeuds 1 et 3

$\Rightarrow \langle U^{(1)} \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0{,}476 \quad -1{,}429 \rangle$: écrit dans le repère global xy

$\Rightarrow$ Dans le repère local $\bar{x}_1 \bar{y}_1$ on a $\{\bar{U}^{(1)}\} = [T^{(1)}] . \{U^{(1)}\}$.

$$\text{avec } [T^{(1)}] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad \text{avec } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{u}_{x_1} \\ \bar{u}_{y_1} \\ \bar{u}_{x_3} \\ \bar{u}_{y_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}476 \\ -1{,}429 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}674 \\ -1{,}347 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta l_3 = d_3 = u_{x_3} - u_{x_1} = -0{,}674 - 0 = -0{,}674 < 0$

$$N_{(3)} = \frac{E_3 A_3}{l_3} . d_3 = \frac{E . A\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} . d_3 = \frac{21000 . 1}{1000} . (-0{,}674) =$$

$$\boxed{N_{(3)} = 14{,}15 \text{ KN}}$$

Pour la barre (2) : $\langle U^{(2)} \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0{,}476 \quad -1{,}429 \rangle$ ← repère global
relie les noeuds 2 et 3

Dans le repère local $\bar{x}_2 \bar{y}_2$ $\{\bar{U}^{(2)}\} = [T^{(2)}] . \{U^{(2)}\}$. avec $\varphi = 0$

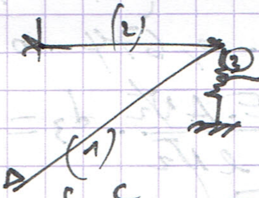
$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{x_2} \\ \bar{u}_{y_2} \\ \bar{u}_{x_3} \\ \bar{u}_{y_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}476 \\ -1{,}429 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow \langle \bar{U}^{(2)} \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0{,}476 \quad -1{,}429 \rangle$

$d = u_{x_3} - u_{x_1} = 0{,}476 \Rightarrow N^{(1)} = \frac{21000 . 1}{1000} . 0{,}476 .$

$$N^{(1)} = 9{,}996 \simeq 10 \text{ KN} .$$

Exo 2 : Reprendre le même exo que précédemment avec un ressort en plus.



$k = \dfrac{EA}{l}$. $\theta = \pi/2$.

$$k^3 = \left(\frac{EA}{l}\right)\begin{bmatrix} c^2 & s.c & -c^2 & -s.c \\ s.c & s^2 & -s.c & -s^2 \\ -c^2 & -s.c & c^2 & s.c \\ -s.c & -s^2 & s.c & s^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{3} & \overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Expansion de cette matrice de 04 colonnes (+) les noeuds 1 et 2

$$[k^3] = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&1 \end{bmatrix}$$

— page 4 —

recto/verso

On fait l'expansion de la matrice globale précédente du nœud 4.

$$[k] \neq [k^3] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & (1/2+1) & 0 & (0-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (0-1) & 0 & (0+1) \end{bmatrix}$$

Le syst d'équations à résoudre sera.

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ 0 \\ -F \\ F_{x_4} \\ F_{y_4} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \cancel{u_{x_1}}^0 \\ \cancel{u_{y_1}}^0 \\ \cancel{u_{x_2}}^0 \\ \cancel{u_{y_2}}^0 \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \\ \cancel{u_{x_4}}^0 \\ \cancel{u_{y_4}}^0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) - \\ (6) - \\ (7) \\ (8) \end{matrix}$$

La résolution des équations (5) et (6)

$(5) \Rightarrow \frac{3}{2} u_{x_3} + \frac{1}{2} u_{y_3} = 0 \Rightarrow u_{x_3} = -\frac{u_{y_3}}{3}$

$(6) \Rightarrow \frac{EA}{l}\left(\frac{1}{2} u_{x_3} + \frac{3}{2} u_{y_3}\right) \cancel{+ 1 \cdot u_{y}} = -F$ or $u_{x_3} = -\frac{u_{y_3}}{3}$

$\Rightarrow -\frac{u_{y_3}}{3} + \frac{3}{3} 3 \cdot u_{y_3} = -\frac{2lF}{EA} \Rightarrow \frac{8 u_{y_3}}{3} = -\frac{2F \cdot l}{EA}$

$\Rightarrow \boxed{u_{y_3} = -\frac{6F \cdot l}{8 \cdot EA}}$ (pge 1) et $\boxed{u_{x_3} = +\frac{6F \cdot l}{24 \cdot EA}}$

suite au verso

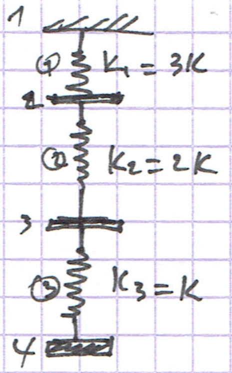
$$u_{y_3} = -\frac{6F \cdot l}{8 \cdot E \cdot A} = -\frac{6 \cdot 10 \cdot 1000}{8 \cdot 21000 \cdot 1} = -0{,}3571 cm$$

$$\boxed{u_{y_3} = -0{,}3571 \text{ cm}}$$

$$u_{x_3} = \frac{F \cdot l}{4 \cdot E \cdot A} = \frac{10 \cdot 1000}{4 \cdot 21000 \cdot 1} =$$

$$\boxed{u_{x_3} = 0{,}1190 \text{ cm}}$$

Exercice 3 :



chaque nœud possède un degré de liberté.

élément ①

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 3K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

élément ②

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} = 2K \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

élément ③

$$\begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Expansion des matrices de rigidités élémentaires.

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & 3K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2K & -2K & 0 \\ 0 & -2K & 2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{or } v_1 = 0$$

La somme de ces trois systèmes d'équations donne le syst global.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & 5K & -2K & 0 \\ 0 & -2K & 3K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

or $F_2 = -mg = F_3 = F_4$

Finalement on obtient le système d'équations suivant :

$$-mg = 5kV_2 - 2kV_3$$

$$-mg = -2kV_2 + 3kV_3 - kV_4$$

$$-mg = kV_3 + kV_4$$

Après résolution on obtient :

$$V_2 = -\frac{mg}{k} \; ; \; V_3 = -\frac{2mg}{k} \text{ et } V_4 = -\frac{3mg}{k} .$$

Exercice 05 : voir le cours. chapitre 06

Exercice 06 voir le cours. chapitre 06