Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2 PN
Année universitaire : 23/24

4 juin 2024
Durée : 1 h 30

Examen de géométrie

Exercise 1 (8 points).
Soient $A(-1,1,0)$, $B(1,0,2)$ et $C(4,2,1)$ trois points d'un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que
$$G = \text{Bar}\{(A,1),\ (B,-2),\ (C,3)\}.$$
2. Déterminer le point H sachant que B est milieu du segment $[A,H]$.
3. Soit L le plan d'équation cartésienne $x-3z=1$. Déterminer $\overrightarrow{L}$.
4. Déterminer l'intersection du plan L et de la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.

Exercise 2 (7 points).
Soient $A(2,1,0)$, $B(2,0,1)$ et $C(4,2,1)$ trois points d'un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Trouver une équation cartésienne du plan $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
2. Déterminer la projection orthogonale du point $N(2,2,2)$ sur $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
3. Déterminer la distance de N au plan $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Exercise 3 (5 points).
Soit E un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Considérons l'application $f : E \to E$ qui associe à chaque point $M(x,y,z)$ le point $M'(x',y',z')$ tel que
$$\begin{cases} x' = 2x+y-z-2, \\ y' = y, \\ z' = 2x+2y-z-4. \end{cases} \tag{1}$$

1. Est-ce que l'application f est surjective ? Justifier.
2. Prouver que f est une projection affine, et déterminer sa base et sa direction.

Corrigé

Exercise 1 (8 points)**.** Les points sont répartis comme suit : 2+2+2+2.

1. Nous avons en général

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Bar}\{(A_i, \alpha_i) : i = 1, \ldots, n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\iff \sum_1^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} G = \mathrm{Bar}\{(A, 2),\ (B, -3)\ (C, 3)\} &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}}{2} \\ &\iff G\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} \\ &\iff \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &\iff H\,(3, -1, 4)\,. \end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in L &\iff x - 3z = 1 \\ &\iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(x = 3\alpha + 1, \quad y = \beta, \quad z = \alpha) \\ &\iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,((x, y, z) = (3\alpha + 1, \beta, \alpha)) \\ &\iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,((x, y, z) = \alpha(3, 0, 1) + \beta(0, 1, 0) + (1, 0, 0))\,. \\ &\iff (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R})\left(\overrightarrow{IM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) \quad (\text{où} \quad I(1, 0, 0),\ \vec{u}(3, 0, 1),\ \vec{v}(0, 1, 0)) \\ &\iff M \in P(I, \vec{u}, \vec{v}). \end{aligned}$$

Alors

$$\overrightarrow{L} = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}.$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in D(A,\overrightarrow{AB}) &\iff (\exists t\in\mathbb{R})\left(\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\right)\\
&\iff (\exists t\in\mathbb{R})\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{AB}\right)\\
&\iff (\exists t\in\mathbb{R})\left(\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}\right)\\
&\iff (\exists t\in\mathbb{R})\,((x,y,z)=t(2,-1,2)+(-1,1,0))\\
&\iff (\exists t\in\mathbb{R})\,(x=2t-1,\ y=-t+1,\ z=2t)\,.
\end{aligned}$$

Si $T(2t-1,-t+1,2t)\in L$ alors on doit avoir $(2t-1)-3(2t)=1$, ce qui veut dire $t=-\frac{1}{2}$. Alors

$$L\cap D(A,\overrightarrow{AB}=\left\{T\left(-2,\frac{3}{2},-1\right)\right\}.$$

Exercise 2 (7 points)**.** Les points sont répartis comme suit : 3+2+2.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
M(x,y,z)\in P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &\iff \det_B\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0\\
&\iff \det\begin{bmatrix} x-2 & 0 & 2\\ y-1 & -1 & 1\\ z & 1 & 1\end{bmatrix}=0\\
&\iff x-y-z=1.
\end{aligned}$$

   Alors l'équation cartésienne de $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est donnée par

$$x-y-z=1$$

2. Dans ce qui suit on notera $P(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ simplement par P. De l'équation cartésienne précédente on conclut que $\vec{n}(1,-1,-1)$ est un vecteur normal à P. Comme N' est la projection orthogonale de N sur P alors il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{NN'}=t\vec{n}$. Si $N'(x,y,z)$, alors $(x,y,z)=(t+2,-t+2,-t+2)$. Comme $N'\in P$ alors $(t+2)-(-t+2)-(-t+2)=1$ en re mplaçant x,y,z dans $x-y-z=1$. Ce qui donne $t=1$. Alors

$$N'(3,1,1).$$

3. On notera la distance de N au plan P par $d(N,P)$. Alors

$$\begin{aligned}
d(N,P)&=d(NN')\\
&=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2+(1-2)^2}\\
&=\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Exercise 3 (5 points)**.** Les points sont répartis comme suit : 2+(1+1+1).

1. Nous avons $x'+y'-z'-2 = (2x+y-z-2)+y-(2x+2y-z-4))-2 = 0$. Alors si on prend le point $N(0,0,0)$ alors N n'a pas d'antécédent car $(0,0,0)$ ne satisfait pas à l'équation $x'+y'-z'-2=0$. Alors l'application f n'est pas surjective.
2. Dans le cas d'une projection affine, la base est l'ensemble des points invariants. Alors

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff (x',y',z') = (x,y,z) \\ &\iff x = 2x+y-z-2 \quad \text{et} \quad y = y \quad \text{et} \quad z = 2x+2y-z-4 \\ &\iff x+y-z-2 = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des points invariants est le plan Δ d'équation $x+y-z-2=0$.
Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= (x'-x)\vec{e}_1 + (y'-y)\vec{e}_2 + (z'-z)\vec{e}_3 \\ &= (x+y-z-2)\,(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \\ &= g(x,y,z)\vec{v}, \end{aligned}$$

où $\quad g(x,y,z) = x+y-z-2 \quad$ et $\quad \vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$.

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} x'+y'-z'-2 &= (2x+y-z-2)+y-(2x+2y-z-4))-2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $f(M) \in \Delta$.
Nous avons aussi $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Delta} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{v}$.
Alors de ce qui précède on voit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est parallèle à $\vec{v}$ et $M' \in \Delta$, ce qui veut dire que f est la projection de base le plan Δ (d'équation $x+y-z-2=0$) et de direction le vecteur $\vec{v}(1,0,2)$.