Département FI(LMD) SECSG **Mardi 11 Juin 2024**
Université De Bejaia
1ere Année

Corrigé De L'Examen De Mathématiques(II)

Examen De Rattrapage

Corrigé de l'exercice1(09pts) **I-** On a le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} -x+4y+2z=1 \\ 2x-7y-3z=0 \\ 3x-12y-5z=1 \end{cases}$$

1. **La matrice des coefficients A et la matrice augmentée $\tilde{A}$ (0.5pts).**

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 3 & -12 & -5 \end{pmatrix};\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & -12 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

2. **Ecriture matricielle de (S) (0.5pts)**

En posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} et\ b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a : $(S)\Leftrightarrow AX=b\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 3 & -12 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. **Les valeurs des éléments de A (0.5pts)**

$$\blacksquare\ a_{13}=2\ \blacksquare\ a_{31}=3\ \blacksquare\ a_{21}=2\ \blacksquare\ a_{12}=4$$

II– On a la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & \dots & -2 \\ \dots & 1 & \dots \\ 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

4. **Complétion de B (0.5pts)** On a $b_{21}=-1, b_{12}=4, b_{32}=0$ et $b_{23}=-1$. Donc,

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Calcul du produit BA (02.5pts).** On a

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 3 & -12 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_1\times C_1 & L_1\times C_2 & L_1\times C_3 \\ L_2\times C_1 & L_2\times C_2 & L_2\times C_3 \\ L_3\times C_1 & L_3\times C_2 & L_3\times C_3 \end{pmatrix}$$

Où L_i désigne la i^eme ligne de la matrice B et C_j désigne la j^eme colonne de la matrice A. Ainsi, on a :

Les éléments de la première ligne

$\blacksquare\ L_1\times C_1=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(1)(-1)+(4)(2)+(-2)(3)=-1+8-6=\mathbf{1}.$ **(0.25pts)**

$\blacksquare\ L_1\times C_2=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix}=(1)(4)+(4)(-7)+(-2)(-12)=4-28+24=\mathbf{0}.$ **(0.25pts)**

$\blacksquare\ L_1\times C_3=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}=(1)(2)+(4)(-3)+(-2)(-5)=2-12+10=\mathbf{0}.$ **(0.25pts)**

Les éléments de la deuxième ligne

$\blacksquare\ L_2\times C_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(-1)(-1)+(1)(2)+(-1)(3)=1+2-3=\mathbf{0}.$ **(0.25pts)**

■ $L_2 \times C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix} = (-1)(4) + (1)(-7) + (-1)(-12) = -4 - 7 + 12 = \mathbf{1}.$ **(0.25pts)**

■ $L_2 \times C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1)(2) + (1)(-3) + (-1)(-5) = -2 - 3 + 5 = \mathbf{0}.$ **(0.25pts)**

Les éléments de la troisième ligne

■ $L_3 \times C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (3)(-1) + (0)(2) + (1)(3) = -3 + 0 + 3 = \mathbf{0}.$ **(0.25pts)**

■ $L_3 \times C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix} = (3)(4) + (0)(-7) + (1)(-12) = 12 + 0 - 12 = \mathbf{0}.$ **(0.25pts)**

■ $L_3 \times C_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = (3)(2) + (0)(-3) + (1)(-5) = 6 + 0 - 5 = \mathbf{1}.$ **(0.25pts)**

Donc,
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. \quad \textbf{(0.25pts)}$$

6. Ce qu'est la matrice B pour la matrice A(0.5pts).

On a $BA = I_3$. Donc, la matrice B est la matrice inverse de A . En d'autre terme : $A^{-1} = B$.

III– Résolution du système (S) :

7. Résolution du système par la Matrice Inverse(01pts)

Comme la matrice des coefficients A est inversible, alors le système (S) admet une seule solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnée par : $X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix}$. Avec,

■ $L_1 \times C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(1) + (4)(0) + (-2)(1) = 1 + 0 - 2 = \mathbf{-1}.$ **(0.25pts)**

■ $L_2 \times C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)(1) + (1)(0) + (-1)(1) = 1 + 0 + 4 = \mathbf{-2}.$ **(0.25pts)**

■ $L_3 \times C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (3)(1) + (0)(0) + (1)(1) = 3 + 0 + 1 = \mathbf{4}.$ **(0.25pts)**

Finalement :
$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.25pts)}$$

---

8. Résolution de (S) par Cramer (03pts)

Comme le système est de Cramer (A est inversible), il admet une unique solution $\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : **(0.5pts)**

$$\blacksquare\ \boldsymbol{x}=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{1}&4&2\\\mathbf{0}&-7&-3\\\mathbf{1}&-12&-5\end{vmatrix}}{-1}=\mathbf{-1}\ \blacksquare\ \boldsymbol{y}=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}-1&\mathbf{1}&2\\2&\mathbf{0}&-3\\3&\mathbf{1}&-5\end{vmatrix}}{-1}=\mathbf{-2}\ \blacksquare\ \boldsymbol{z}=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}-1&4&\mathbf{1}\\2&-7&\mathbf{0}\\3&-12&\mathbf{1}\end{vmatrix}}{-1}=\mathbf{4}$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare |A|=\left|\begin{matrix}-1&4&2\\2&-7&-3\\3&-12&-5\end{matrix}\right|\begin{matrix}-1&4\\2&-7\\3&-12\end{matrix}\Bigg|=(-1)(-7)(-5)+(4)(-3)(3)+(2)(2)(-12)-(2)(-7)(3)$$

$$-(-1)(-3)(-12)-(4)(2)(-5)=-35-36-48+42+36+40=\mathbf{-1}.$$ **(0.5pts)**

$$\blacksquare |A_x|=\left|\begin{matrix}\mathbf{1}&4&2\\\mathbf{0}&-7&-3\\\mathbf{1}&-12&-5\end{matrix}\right|\begin{matrix}\mathbf{1}&4\\\mathbf{0}&-7\\\mathbf{1}&-12\end{matrix}\Bigg|=(1)(-7)(-5)+(4)(-3)(1)+(2)(0)(-12)-(2)(-7)(1)$$

$$-(1)(-3)(-12)-(4)(0)(-5)=35-12+0+14-36+0=\mathbf{1}.$$ **(0.5pts)**

$$\blacksquare |A_y|=\left|\begin{matrix}-1&\mathbf{1}&2\\2&\mathbf{0}&-3\\3&\mathbf{1}&-5\end{matrix}\right|\begin{matrix}-1&\mathbf{1}\\2&\mathbf{0}\\3&\mathbf{1}\end{matrix}\Bigg|=(-1)(0)(-5)+(1)(-3)(3)+(2)(2)(1)-(2)(0)(3)$$

$$-(-1)(-3)(1)-(1)(2)(-5)=0-9+4-0-3+10=\mathbf{2}.$$ **(0.5pts)**

$$\blacksquare |A_z|=\left|\begin{matrix}-1&4&\mathbf{1}\\2&-7&\mathbf{0}\\3&-12&\mathbf{1}\end{matrix}\right|\begin{matrix}-1&4\\2&-7\\3&-12\end{matrix}\Bigg|=(-1)(-7)(1)+(4)(0)(3)+(1)(2)(-12)-(1)(-7)(3)$$

$$-(-1)(0)(-12)-(4)(2)(1)=7+0-24+21-0-8=\mathbf{-4}.$$ **(0.5pts)**

Finalement : $$\overline{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$$ **(0.5pts)**

Corrigé de l'exercice2(05pts) La résolution du système (S) par Gauss :

$$(S)\begin{cases}x+2y-z+t=13\\2x+4y-2z+2t=26\\x+2y+4t=16\\-2x-4y+4z=-22\end{cases}$$

■ Echelonnement de la matrice augmentée : **(02pts)**

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&2&-1&1&13\\2&4&-2&2&26\\1&2&0&4&16\\-2&-4&4&0&-22\end{array}\right)\begin{matrix}L_2\longleftarrow L_2+(-2)L_1\\L_3\longleftarrow L_3+(-1)L_1\\L_4\longleftarrow L_4+(2)L_1\end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&2&-1&1&13\\0&0&\mathbf{0}&0&0\\0&0&1&3&3\\0&0&2&2&4\end{array}\right)L_2\leftrightarrow L_4$$ **(01pts)**

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&2&-1&1&13\\0&0&\mathbf{2}&2&4\\0&0&1&3&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)L_2\leftarrow\tfrac{1}{2}L_2\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&2&-1&1&13\\0&0&\mathbf{1}&1&2\\0&0&1&3&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)L_3\longleftarrow L_3+(-1)L_2$$ **(0.5pts)**

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&2&-1&1&13\\0&0&\mathbf{1}&1&2\\0&0&0&\mathbf{2}&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)L_3\leftarrow\tfrac{1}{2}L_3\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&2&-1&1&13\\0&0&\mathbf{1}&1&2\\0&0&0&\mathbf{1}&1/2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=\tilde{A}_e$$ **(0.5pts)**

■ Soit (S_e) le système associé à la matrice $\tilde{A}_e$:

$$(S_e)\begin{cases} \boldsymbol{x}+2y-z+t=13 \\ \boldsymbol{z}+t=2 \\ \boldsymbol{t}=\frac{1}{2} \end{cases}$$ **(0.5pts)**

Ainsi le système (S) admet une infinité de solutions (Dans (S_e) le nombre d'équations $<$ au nombre de variables).

■ La résolution de (S_e) : En résolvant par rapport à la première variable de chaque équation et par la méthode de substitution, on obtient :

$$\begin{cases} x=13-2y+z-t \\ z=2-t \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=13-2y+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ z=\frac{3}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$$ **(01.5pts)**

■ Finalement, les solutions du système (S) sont : $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14-2a \\ a \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$. **(01pts)**

Corrigé de l'exercice3(06pts) On a les matrices suivantes :

$$■\ A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\ ■\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Le Calcul (01.5pts)**

■ $A-6I_2=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. **(01pts)**

■ $B^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

---

2. **La matrice inverse par la méthode des cofacteurs (02pts)**

On a $\det(A-6I_2)=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=(-3)(-2)-(1)(2)=6-2=4$. Donc, A est inversible.

Les cofacteurs de $A-6I_2$ on a $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ désigne le cofacteur de la ième ligne et jème colonne.

■ $A_{11}=(-1)^2(-2)=\boldsymbol{-2}$ ■ $A_{12}=(-1)^3(1)=\boldsymbol{-1}$ ■ $A_{21}=(-1)^3(2)=\boldsymbol{-2}$ ■ $A_{22}=(-1)^4(-3)=\boldsymbol{-3}$.

La comatrice de $A-6I_2$ $Com\,(A-6I_2)=\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $[Com\,(A-6I_2)]^t=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

L'inverse de $A-6I_2$ $(A-6I_2)^{-1}=\frac{1}{\det(A-6I_2)}[Com\,(A-6I_2)]^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

---

3. **Résolution de l'équation matricielle (02.5pts)** On a : $B^t+6X=XA$. Ce qui nous donne :

$B^t=XA-6X$. Et par la suite, $B^t=X(A-6I_2)$. Et en utilisant l'inverse de $A-6I_2$, on obtient :

$$X=B^t(A-6I_2)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$