Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2**
Département de Recherche Opérationnele

Solution-Examen de remplacement du module Analyse Complexe (2023-2024)

Exercice 1:

(I.c) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ donc

$$\begin{aligned}
iz^2 + 2z\overline{z} + z - i = 0 &\iff x(3-2y) + i(x^2 - y^2 - y - 1) = 0 \\
&\iff \left(x = 0 \text{ ou } y = \tfrac{3}{2}\right) \text{ et } x^2 - y^2 - y - 1 = 0 \\
&\iff \left(x = 0 \text{ et } y^2 + y + 1 = 0\right) \text{ ou } \left(y = \tfrac{3}{2} \text{ et } x^2 = \frac{19}{4}\right) \\
&\iff y = \frac{3}{2} \text{ et } x = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}.
\end{aligned}$$

La première proposition n'est pas vraie puisque l'équation $y^2 + y + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles. Par conséquent, les solutions de l'équation demandée sont

$$z = \pm\frac{\sqrt{19}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Exercice 2:

Soit $f(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout nombre complexe z non nul.

a) On a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z(z+\Delta z)} = -\frac{1}{z^2} \in \mathbb{C}$$

ce qui montre que f est dérivable sur $\mathbb{C}^*$ et

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

b) On pose $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, alors

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y).$$

Donc il est clair que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ donc les dérivées partielles sont continues en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$. De plus, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Par conséquent, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées et d'après la réciproque du théorème des conditions de Cauchy-Riemann, f est dérivable en tout point $z \neq 0$ et

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{(\overline{z})^2}{(z\overline{z})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Exercice 3:

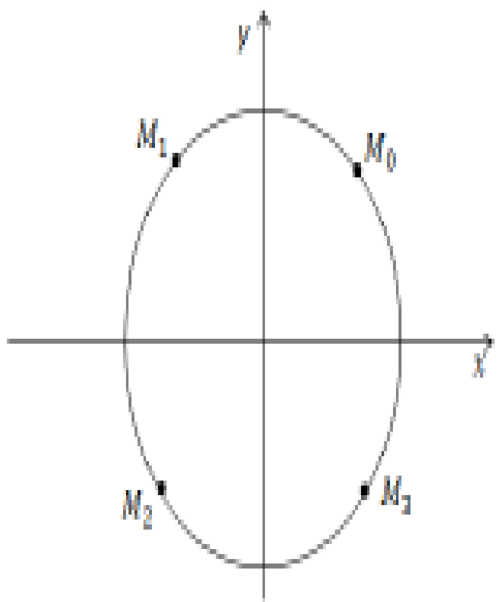
(1.a) Cherchons les solutions de l'équation $z^4 = -4$ qui est équivalente à $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1$; Or les racines d'ordre 4 de -1 sont $e^{i\frac{2k+1}{4}\pi}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$. D'où les solutions demandées sont

$$z_k = \sqrt{2}e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Explicitement, on a

$$z_0 = 1 + i, \qquad z_1 = -1 + i, \qquad z_2 = -1 - i, \qquad z_3 = 1 - i.$$

La représentation graphique des points M_k d'affixes z_k est donnée par le carré



Exercice 4:

Posons $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ et $v(x,y) = -2xy + 2y$. Les dérivées partielles de u et v sont données par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -2x + 2, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y. \end{cases}$$

Nous remarquons que les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

sont satisfaites pour $(x,y) = (0,0)$. Ce qui implique que la fonction f est holomorphe au point 0.

Exercice 5:

Si $|z-1|<1$ alors $\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$. Et si $|z-1|>1$ alors

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-1}.$$

Solution : On a

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2 &= (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}+(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\ &= |z_1|^2-2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}+|z_2|^2+|z_1|^2+2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2}+|z_2|^2\\ &= 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).\end{aligned}$$

Exercice 6:

Soit f une fonction complexe définie par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

a) Montrons que f est continue en 0. On a

$$|f(z)|^2 = 2\frac{x^6 + y^6}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2\frac{(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|z|^2$$

d'où

$$0 < |f(z)| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Puisque

$$\lim_{z \to 0} 0 = \lim_{z \to 0} \sqrt{2}|z| = 0$$

alors

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 0.$$

D'où f est continue en 0.

b) Soit $z \neq 0$ alors

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)\frac{1}{x + iy} = \frac{(x^3 - y^3) + i(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}(x - iy).$$

Posons $y = tx$ pour un réel t, donc

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \frac{(1 - t^3) + i(1 + t^3)}{(1 + t^2)^2}(1 - it).$$

Et puisque les limites sont différentes sur des chemins différents (e.g. $y = tx$) alors f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7:

La paramétrisation des chemins est donnée par :

$$\gamma_1(t) = i - it, \quad 0 \leq t \leq 1, \;\; \gamma_1'(t) = -i,$$

et

$$\gamma_2(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \;\; \gamma_2'(t) = 1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \overline{z} dz &= \int_{\gamma_1} \overline{z} dz + \int_{\gamma_2} \overline{z} dz, \\ &= \int_0^1 [-i + it](-i) dt + \int_0^1 [t](1) dt, \\ &= -0.5 + 0.5 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 8:

2/ Les singularités de f sont

$$z_0 = 2, \qquad z_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2i.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_2 := \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)} dz \quad = \quad \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z+2i)(z-2i)} dz.$$

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$I_2 := \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)} dz \quad = \quad 0.$$

3/ Les singularités de f sont

$$z_0 = 2, \qquad z_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2i.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_2 := \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z^2-4iz-4)} dz \quad = \quad \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z-2i)^2} dz.$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I_1 \quad &= \quad \int_{\gamma_1} \frac{\frac{z+1}{(z-2i)^2}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{z+1}{z}}{(z-2i)^2} dz, \\ &= \quad 2\pi i[g_1(0) + g_2'(2i)] = 2\pi i \left[\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 0, \end{aligned}$$

avec

$$g_1(z) = \frac{z+1}{(z-2i)^2},$$

et

$$g_2(z) = \frac{z+1}{z}.$$