Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2**
Département de Recherche Opérationnele

Examen S02 du module Analyse Complexe (2023-2024)

Exercice 1:

- Montrer l'identité suivante :

$$\forall z_1; z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big).$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$; les équations suivantes :

$$iz^2 + 2\overline{z} + z - i = 0; \quad (z-1)^3 - 1 = 0.$$

- Exprimez sous forme algèbrique et représenter dans le plan les nombres complexes $z(r;\theta)$ suivants : $z = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$
- On considère la fonction complexe définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i \ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \text{ si } z \neq 0; \\ 0 \ \text{ si } z = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue en $z = 0$;
2. Démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en $z = 0$;
3. Démontrer que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en $z = 0$;
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 2:

- Montrer que : $sin^2 z + cos^2 z = 1$.
- Vérifier les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions suivantes : $w = z^3$; $w = sinz$.

Exercice 3: Soit $f(z) = log(1+z)$; où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$:

- Développer $f(z)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$;
- En déduire le Développement $log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

Exercice 4: Évaluer les intégrales :

$$\oint_C dz; \quad \oint_C z dz; \quad \oint_C (z - z_0) dz,$$

où C est un chemin fermé simple et z_0 une constante.

Exercice 5: Calculer $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz; n \in \mathbb{N}^*$; où C est une courbe fermée simple dans les deux cas suivants :

- z_0 est à l'extérieur de C,
- z_0 est à l'intérieur de C (distinguer le cas $n = 1$ et $n \geq 2$).

Bonne chance

Pr Ouiza LEKADIR.