

Examen de Rattrapage de MATHS 1

Exercice 1. (05 pts)

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n.$$

2. Montrer par contraposition que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x^5 + x < 2 \implies x < 1).$$

Exercice 2. (10 pts)

I. On définit sur \mathbb{R} la relation binaire \mathfrak{R} suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \leq y.$$

1. Montrer que \mathfrak{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

2. Cet ordre est-il total ?

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(0)$.

2. Calculer $f^{-1}(\{-2\})$.

3. L'application f est-elle injective? surjective? Justifier.

4. Montrer que l'application $g : [-1, +1] \rightarrow [-1, +1]$ définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection et donner sa réciproque.

Exercice 3. (05 pts)

1. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, $a > 0$.

2. Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

Bon courage

Corrigé de l'examen de rattrapage MATHS 1

Exercice 1. (05 pts)

1. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons par $P(n)$ la proposition $3^n \geq 1 + 2n$.

- Pour $n = 0$, on a $3^0 = 1 + 2 \cdot 0 \Rightarrow 1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie. (0,5)

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie (i.e. $3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)$). (0,5)

On a:

$$\begin{aligned} 3^n \geq 1 + 2n &\Rightarrow 3^n \cdot 3 \geq 3 + 6n \\ &\Rightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 2n + 4n \\ &\Rightarrow 3^{n+1} \geq 3 + 2n \\ &\Rightarrow 3^{n+1} \geq 1 + 2 + 2n \\ &\Rightarrow 3^{n+1} \geq 1 + 2(1 + n) \\ &\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 1 + 2n$ est vraie.

2. Montrons par la contraposition que : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^5 + x < 2 \Rightarrow x < 1)$.

La contraposée de la proposition est :

$$x \geq 1 \Rightarrow x^5 + x \geq 2. \quad (1)$$

On a

(1) $x \geq 1$

et

(2) $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x^4 \geq 1 \Rightarrow x^5 \geq 1$

(1) + (2) $\Rightarrow x^5 + x \geq 1 + 1 \Rightarrow x^5 + x \geq 2$.

Par le principe de contraposition, on a montré que : $x^5 + x < 2 \Rightarrow x < 1$.

Exercice 2. (10 pts)

I. On définit sur \mathbb{R} la relation binaire \mathcal{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y.$$

1. Montrons que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{R} .

a) Réflexivité de \mathcal{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $x \leq x$, donc $x \mathcal{R} x$, d'où \mathcal{R} est réflexive. (0,5)

b) antisymétrie de \mathcal{R}

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$. On a

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{et} \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y \text{ d'où } \mathcal{R} \text{ est antisymétrique.} \quad (0,5)$$

c) Transitivité de \mathcal{R}

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. On a

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \text{et} \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x \mathcal{R} z \text{ d'où } \mathcal{R} \text{ est transitive.} \quad (0,5)$$

Conclusion: de a), b) et c), \mathbb{R} est une relation d'ordre.

2. Cette relation est relation d'ordre totale puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$. 115

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(0)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}, f(2) = \frac{4}{5}, f(0) = 0. \quad 115$$

2. Calculons $f^{-1}(\{-2\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{-2\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = -2\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x}{1+x^2} = -2\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 2x = -2 - 2x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 2(1+x+x^2) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 1+x+x^2 = 0\} \\ &= \emptyset. \end{aligned} \quad 015$$

3. f n'est pas injective car $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$ mais $\frac{1}{2} \neq 2$. 015

f n'est pas surjective car, car $\nexists x \in \mathbb{R} / f(x) = -2$. 015

4. $g : [-1, +1] \rightarrow [-1, +1] / g(x) = f(x)$.

Montrons que : g est injective:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\implies \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\ &\implies 2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2) \\ &\implies x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_2x_1^2 \\ &\implies x_1 - x_2 = x_2x_1^2 - x_1x_2^2 \\ &\implies x_1 - x_2 = x_1x_2(x_1 - x_2) \\ &\implies (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\implies (x_1 - x_2) = 0 \vee (x_1x_2 = 1) \\ &\implies (x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_2 = 1 \vee x_1 = x_2 = -1) \end{aligned} \quad 110$$

donc g est injective.

Montrons que g est surjective.

Résolvons l'équation $y = \frac{2x}{1+x^2}$, on a :

$$y = \frac{2x}{1+x^2} \implies yx^2 - 2x + y = 0. \quad 110$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0, \text{ car } y \in [-1, 1].$$

donc l'équation $y = g(x)$ admet deux solutions ($y \neq 0$):

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \notin [-1, +1].$$

si $y = 0 \implies x = 0$

d'où g est surjective.

comme g est injective et surjective, alors g est bijective, et

$$g^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow [-1, +1]$$

et

$$x = g^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

0,15

Exercice 3. (5 pts)

1. Calculons les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)}$$

En appliquant la règle de l'Hôpital, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x^2))'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

1

b) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, $a > 0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)}$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

1

2. La continuité de f en $x_0 = 1$.

On a

* $f(1) = 4$.

* $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x+3} + 2 = 4$

* $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 2x - 3)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 2}{1} = 4.$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, alors f est continue en $x_0 = 1$.

0,15