Université A. Mira de Bejaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

Examen de Rattrapage d'Analyse 1

Parcours Ingénieur   Durée : 1h30

Remarque *Les étapes nécessaires de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(05 points).*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire l'expression suivante sans valeur absolue :
$$f(x) = -2 + |x - 1|.$$
2. Evaluer les expressions suivantes : $E\left(\frac{3}{2}\right), \quad E(-\pi), \quad E(\pi)$.
(où $E(x)$ *la partie entière de* x).

Exercice 2 *(08 points).*

On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + \dfrac{3}{2U_n}. \end{cases}$$

1. Calculer : $U_1, \ U_2$.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}$.
3. Montrer que (U_n) est décroissante.
4. Déduire que la suite (U_n) converge vers un réel λ, déterminer cette limite λ.
5. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, $SupE$, $InfE$, $MaxE$, $MinE$ de l'ensemble suivant : $E = \{ U_n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 *(07points).*

Soient a *et* b deux nombres réels. On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & si \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & si \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer b pour que f soit continue sur D_f.
3. Déterminer a *et* b pour que f soit dérivable sur D_f.
4. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation : $x + e^x = 0$ admet au moins une racine réelle sur $]-1,0[$.

Bonne chance

Pr. BOUKOUCHA

Corrigé de l'Examen de Rattrapage d'Analyse I

Exercice 1. ***Solution (05 points).***

1) Ecrivons l'expression de: $f(x) = -2 + |x-1|$ *sans valeur absolue.*

$$\text{On a: } f(x) = \begin{cases} -x-1 \text{ si } & x \in \left]-\infty, \quad 1\right] \\ \\ x-3 \quad \text{si} & x \in \left[1, \quad +\infty\right[\end{cases}$$

2

2) Evaluons les expressions:

1

$$E\left(\frac{3}{2}\right) = E(1,5) = 1, \qquad E(-\pi) = E(-3,14) = -4, \qquad E(\pi) = E(3,14) = 3$$

1 1

Exercice 2. ***Solution (08 points).***

1) Calculons U_1 *et* U_2*:*

$$U_1 = \frac{1}{2}U_0 + \frac{3}{2U_0} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

0,5

$$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + \frac{3}{2U_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{2\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{97}{56}$$

0,5

2) Montrons que : $P(n) : \left[\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}\right]$.

On utilise raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, *on a:* $U_0 = 2 > \sqrt{3}$, *donc* $P(0)$ *est vraie.*

0,5

- On démontre que: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}$ *fixé, c'est à dire:*

$$U_n > \sqrt{3}, \text{ (hypothèse de la récurrence).}$$

0,5

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire:* $U_{n+1} > \sqrt{3}$.

On a: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} = \frac{U_n^2+3}{2U_n} = \frac{\left(U_n - \sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}U_n}{2U_n} > \frac{2\sqrt{3}U_n}{2U_n}$, *car* $U_n > \sqrt{3}$

D'où, $U_{n+1} > \sqrt{3}$. *Donc,* $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

1

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}$.

3) Montrons que (U_n) est décroissante.

$$\text{On a: } U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2}U_n+\frac{3}{2U_n}-U_n=\frac{3-U_n^2}{2U_n}=\frac{\left(\sqrt{3}+U_n\right)\left(\sqrt{3}-U_n\right)}{2U_n}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+U_n\right)\overbrace{\left(\sqrt{3}-U_n\right)}^{(-)}}{2U_n},\quad \left(\left(\sqrt{3}-U_n\right)<0, car:\ U_n>\sqrt{3}\right)$$

1

Alors, la suite (U_n) est décroissante.

4) Déduisons que la suite (U_n) converge vers un réel λ.

On a: La suite (U_n) est décroissante est minorée par $\sqrt{3}$, donc la suite (U_n) converge vers un réel λ.

1

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

$$\text{On a: } \lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}U_n+\frac{3}{2U_n}\right)\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty}U_n+\frac{3}{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{3}{\lambda}\right)\Rightarrow \lambda^2=3$$

d'où $\lambda=\sqrt{3}$ ou $\lambda=-\sqrt{3}$ rejeté car: $U_n>\sqrt{3}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{3}$.

1

5) Déterminons (s'ils existent) : les majorants, les minorants, $\sup E$, $\inf E$, $\max E$, $\min E$ *de l'ensemble suivant:* $E=\{U_n\ ,\ \ n\in\mathbb{N}\}$.

On a : $E=\{U_n\ ,\ \ n\in\mathbb{N}\}=\{U_0\ ,U_1\ ,U_2\ ,.......\ ,U_n\ \}$.

La suite (U_n) est décroissante et converge vers $\sqrt{3}$, donc on a:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad \underbrace{2}_{U_0}\geq U_n>\sqrt{3}.$$

0,5

Donc, Les majorants de E sont : $[2,+\infty[$ 0,25

Les minorants de E sont : $]-\infty,\sqrt{3}]$ 0,25

$\sup E=2$, 0,25

$\inf E=\sqrt{3}$, 0,25

$\max E=2$ 0,25

$\min E$ *: n'existe pas.* 0,25

Exercice 3. *Solution (07 points).*

1) Le domaine de définition de la fonction f est: $D_f=]-\infty,0]\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}$. 1

2) Continuité de f sur D_f :

Sur $]-\infty,0[$, la fonction f est continue car $x\longmapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $]-\infty,0[$.

Sur $]0,+\infty[$ *, la fonction* f *est continue car* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}-\{-1\}$*, en particulier* f *est continue sur* $]0,+\infty[$*. Donc il nous rèste d'étudier la continuité de* f *en* 0 *:* 0,5

On a: $f(0) = a \times 0 + b = b.$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{1+x} = 1, \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} ax + b = b.$$

0,5 0,5

f *est continue en* 0 *si et seulement si:* $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0) \Longleftrightarrow b = 1.$ 0,5

Donc, f *est continue sur* D_f *si et seulement si* $b = 1$.

3) Dérivabilité de f ***sur*** D_f *:*

0,5 *Sur* $]-\infty,0[$*, la fonction* f *est dérivable car* $x \longmapsto ax+b$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, en particulier* f *est dérivable sur* $]-\infty,0[$*.*

Sur $]0,+\infty[$ *, la fonction* f *est dérivable car* $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}-\{-1\}$*, en particulier* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*.Donc il nous rèste d'étudier la dérivabilité de* f *en* 0 *:*

Dérivabilité de f *en* 0 *:*

Si $b \neq 1$*,* f *n'est pas dérivable en* 0 *car elle n'est pas continue en* 0*.*

Donc Posons $b = 1$*, donc* $f(0) = 1$*.*

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1-1-x}{x(1+x)} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{1+x} = -1 = f'_d(0),$$

0,5

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{ax+1-1}{x} = a = f'_g(0).$$

0,5

0,5 *Donc,* f *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $f'_d(0) = f'_g(0)$*, d'où* $a = -1$*.*

Alors, f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $b = 1$ *et* $a = -1$*.*

4) Montrons que: $x + e^x = 0$ ***admet au moins une racine réelle sur*** $]-1,0[$*.*

Posons : $f(x) = x + e^x$ *sur* $[-1,0]$*.* 0,5

La fonction $x \mapsto x + e^x$ *est continue sur* $]-1,0[$

$$f(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} = -0,63 < 0$$

$$f(0) = 0 + e^0 = 1 > 0$$

0,5

La fonction $x \mapsto f(x)$ *est continue sur* $]-1,0[$ *et* $f(-1)\,f(0) < 0$*, d'après théorème des valeurs intermédiaires il exsite* $c \in\,]-1,0[$ *tel que* $f(c) = 0$ *c'est à dire, l'équation* $x + e^x = 0$ *admet au moins une racine réelle sur* $]-1,0[$*.* 1