Corrigé De L'Examen De Rattrapage De Mathématiques(I)

Corrigé de l'exercice1(05pts) On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique telle que la somme de ses "n" premiers termes est donnée par : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 7 + 11 + 15 + \cdots + 403$.

1. Détermination de la raison r **(01pts)**

Du fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique, alors sa raison vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$r = u_{n+1} - u_n$$

En particulier : $r = u_2 - u_1 = 11 - 7 = 4$.

2. Le nombre de termes "n" de la somme S_n **(02pts)**

On a S_n est la somme des "n" premiers termes dont le premier terme $u_1 = 7$ et le dernier terme $u_n = 403$. Aussi, on sait que : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Donc $u_n - u_1 = (n-1)r$. Ou bien $u_n - u_1 = nr - r$. Ainsi $nr = u_n - u_1 + r$. Et par conséquent :

$$n = \frac{u_n - u_1 + r}{r} = \frac{403 - 7 + 4}{4} = \frac{400}{4} = 100.$$

3. Calcul de la Somme **(02pts)**

On sait que la somme consécutive des termes d'une suite arithmétique dont le premier terme et le dernier terme de cette somme sont respectivement u_1 et u_n est donnée par :

$$S_n = nombre\ de\ termes\ dans\ la\ somme \times \frac{le\ dernier\ terme + le\ premier\ terme}{2}$$

En d'autre terme :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n \times \frac{u_n + u_1}{2} = 100 \times \frac{403 + 7}{2} = 20500.$$

Corrigé de l'exercice2(03pts) Résolution de l'équation avec la fonction exponentielle :

$$e^{2x} - 21e^x + 110 = 0 \qquad (*)$$

Il est clair que le domaine de définition de l'équation $(*)$ est $\mathcal{D}_{eq} =]-\infty, +\infty[$.

En posant $X = e^x$, on a $X \in]0, +\infty[$ et l'équation $(*)$ peut s'écrire sous la forme : **(0.5pts)**

$$X^2 - 21X + 110 = 0 \qquad (**)$$

La résolution de l'équation $(**)$: **(01pts)**

On a le discriminant $\Delta = 1$. Il existe donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{21+1}{2} = 11 \in]0, +\infty[\text{ et } X_2 = \frac{21-1}{2} = 10 \in]0, +\infty[$$

Et par conséquent, l'équation $(*)$ admet deux solutions x_1 et x_2 telles que : **(01.5pts)**

$e^{x_1} = X_1 = 11$ et $e^{x_2} = X_2 = 10$. Et donc, $x_1 = \ln 11$ et $x_2 = \ln 10$.

Corrigé de l'exercice3(05pts) La recherche des extremums de la fonction f en utilisant le teste de la première dérivée dans le cas où :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Comme $x^2 + 1 \neq 0$ pour toute valeur réelle de x, alors f est définie sur $\mathbb{R}$. **(01pts)**

Sa dérivée est donnée par **(01pts)** :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

Les points critiques de f sont les solutions de l'équation : **(01pts)**

$$f'(x) = 0$$

Qui est équivalente à :

$$\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

Sa résolution, nous donne :

$$2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Finalement, f admet deux points critiques :

$$x_1 = -1, x_2 = 0\,, x_3 = 1$$

Et le tableau de variations suivant nous donne le signe de f' **(01pts)** :

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
signe de f'	$-$	0	$+$	0	$-$

Du tableau, on déduit que f admet deux extremums :

- Un minimum local : $f(-1) = -1$ **(0.5pts)**
- Un maximum local : $f(1) = 1$. **(0.5pts)**

Corrigé de l'exercice4(04pts) La recherche des extremums de la fonction f en utilisant le teste de la deuxième dérivée dans le cas où :

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$$

Corrigé De L'Examen De Rattrapage De Mathématiques(I)

Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R}$. Sa première dérivée est donnée par **(0.5pts)** :

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Et sa deuxième dérivée est donnée par **(0.5pts)** :

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

Les points critiques de f sont les solution de l'équation :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0$$

Sa résolution nous donne : **(01pts)**

$$4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \vee x = -1 \end{cases}$$

Ainsi, f admet trois points critiques : $x_1 = -1, x_2 = 0\ , x_3 = 1.$ **(0.5pts)**

L'application du test de la deuxième dérivée à ces points critiques, nous donne :

- $f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$, donc $f(-1) = -4$ est un minimum local. **(0.5pts)**

- $f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$, donc $f(1) = -4$ est un minimum local. **(0.5pts)**
- $f''(0) = -4 < 0$, donc $f(0) = -3$ est un maximum local. **(0.5pts)**

Corrigé de l'exercice5(03pts) Calcul de la dérivée :

- $f(x) = e^{\sqrt{9-x^2}} \ \Longrightarrow f'(x) = \left(\sqrt{9 - x^2}\right)' e^{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}} e^{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} e^{\sqrt{9-x^2}}.$ **(01.5pts)**

- $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)^8 \Longrightarrow f'(x) = 8(3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2 + 1)^7.$ **(01.5pts)**