Université Abderrahmane Mira de Bejaia

Faculté de Technologie **Départements ATE, ELT, ELM**

Niveau : 2eme année licence **Année universitaire : 2023 /2024** **Durée : 1h30**

Examen de Rattrapage Mathématiques 3

Exercice 01 (10pts)

1. **a)** Calculer les primitives suivantes : 2

$$I_1 = \int xe^{-x}dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int \frac{2x^2}{x-1}dx$$ 2

b) Déduire la nature des intégrales impropres suivantes :

1,5 $$J_1 = \int_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_1^3 \frac{2x^2}{\ln(x)}dx$$ 1,5

2. Déterminer la nature des séries numériques suivantes dont les termes généraux :

$$u_n = 3e^{-2n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^2+2n}{n!}$$

1,5 1,5

Exercice 02 (10Pts)

1. Soit $D = \{(x,y) \in R^2, -1 \le x+y \le 1 \text{ et } 0 \le x-y \le 2\}$

a) Tracer le domaine D 1

b) En utilisant le changement de variables suivant : $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ 2

Calculer l'intégrale double suivante : $I_1 = \iint\limits_D (x^2 - y^2)dxdy$

2. Soit $\Delta = \{(x,y) \in R^2, y \le x \text{ et } x^2+y^2 \le 1\}$

a) Tracer le domaine Δ 1

b) Calculer l'intégrale double suivante : $I_2 = \iint\limits_\Delta (\cos(x^2+y^2))dxdy$ 2

3. Soit les volumes $V_1 = \{(x,y,z) \in R^3, y \ge 0, z \ge 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

et $V_2 = \{(x,y,z) \in R^3, 2 \le z \le 3 \text{ et } x^2+y^2 \le 16\}$

Calculer les intégrales triples: $J_1 = \iiint\limits_{V_1} xzdxdydz$ et $J_2 = \iiint\limits_{V_2} \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$

2 2

Bon courage

Corrigé de Rattrapage Maths 03 2023/2024

Exercice 01

1.

a) $I_1 = \int x e^{-x} dx$

$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

02

$I_1 = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + c$

$= (-x-1)e^{-x} + c$

$I_2 = \int \frac{2x^2}{x-1} dx = \int \left(2x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$

2

$= x^2 + 2x + 2\ln|x-1| + c$

2.

$J_1 = \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx \qquad (PS = +\infty)$

$\forall x \in [1; +\infty[$, la fct $x \longmapsto \sqrt{x}\, e^{-x}$ continue

et positive. et $\sqrt{x}\, e^{-x} \leq x e^{-x}$

1

et $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x e^{-x} dx$

$= \lim_{t \to +\infty} \cancelto{0}{(-t-1)e^{-t}} + 2e^{-1}$

$= 2e^{-1} \quad (CV)$

Donc d'après le critère de comparaison

$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} dx$ converge

$J_2 = \int_1^3 \frac{2x^2}{\ln x}\,dx$ (PS = 1)

La fct $x \longmapsto \frac{2x^2}{\ln x}$ continue, positive

sur $]1, 3]$ et : $\frac{2x^2}{\ln x} \sim_1 \frac{2x^2}{x-1}$ 0,5

$\int_1^3 \frac{2x^2}{x-1}\,dx = \lim_{t \xrightarrow{>} 1} \int_t^3 \frac{2x^2}{x-1}\,dx$

$= \lim_{t \xrightarrow{>} 1} t^2 + 2t + 2\ln(t-1) - 15 - 2\ln 2$

$= -\infty$ (diverge)

D'après le critère d'équivalence $\int_1^3 \frac{2x^2}{\ln x}\,dx$ diverge

2.

$u_n = 3e^{-2n} = 3(e^{-2})^n$, suite géométrique

avec $q = e^{-2} < 1$. $-1 < q < 1$. 0,5

Donc la série $\sum u_n$ converge.

$v_n = \frac{n^2+2n}{n!}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+4n+3}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2+2n}$ 0,5

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+4n+3}{n^3+2n^2} = 0 < 1$

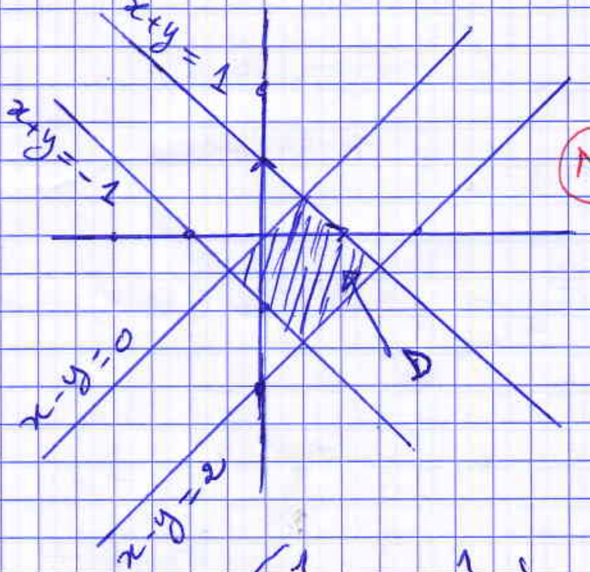
D'après ALAMBERT, la série $\sum v_n$ converge

P02

Exercice 02

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x+y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x-y \leq 2\}$.

a) tracer D :



1

b) $I_1 = \iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy$

on pose $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

0,5

$\det J = -\frac{1}{2}$

$$I_1 = \iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_D (x+y)(x-y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2\int_{-1}^1 u \cdot v \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv$$

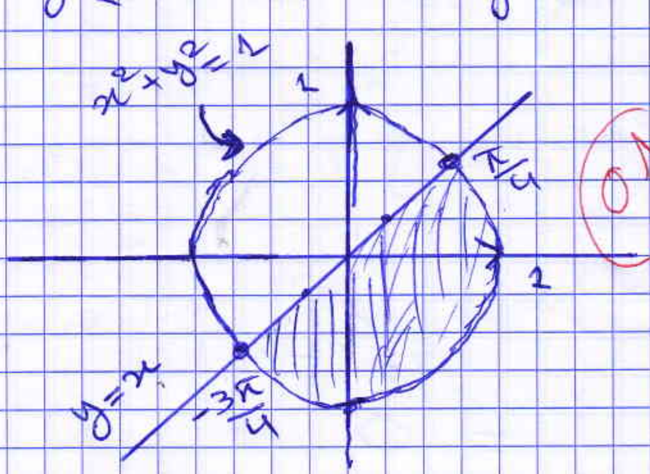
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 v\,dv \cdot \int_{-1}^1 u\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

0,1

2. $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \leq x \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}$.

a) tracer Δ.



01

P03

$$I_2 = \iint_{\Delta} \cos(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

on utilise les coordonnés polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad / \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{array} \quad , \quad |J| = r$$

0,5

$$I_2 = \int_0^1 r\cos(r^2)\, dr \times \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

0,5

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(r^2)\right]_0^1 \times \left[\theta\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin(1) \times \pi$$

$$= \frac{\pi\sin(1)}{2}$$

3. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

$$J_1 = \iiint_{V_1} xz\, dx\, dy\, dz$$

on utilise le coordonnés sphériques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \quad / \quad \Delta_1 \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

0,5

$$|J| = r^2\cos\varphi$$

$$J_1 = \iiint_{\Delta_1} r\cos\theta\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r^2\cos\varphi \; dr\, d\theta\, d\varphi$$

0,5

$$= \int_0^1 r^4\, dr \cdot \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 \cdot \left[\sin\theta\right]_0^{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{P04}$

$$= 0$$

3. $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq z \leq 3 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 16\}$

$$I_2 = \iiint_{V_2} \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\, dy\, dz$$

on utilise les coordonnées cylindriques (0,5)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \Big| \quad D_2 \begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq z \leq 3 \end{cases} \quad |J| = r$$

$$I_2 = \iiint_{D_2} \frac{z^2}{\sqrt{r^2}} \cdot r \, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \int_2^3 z^2\, dz \cdot \int_0^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

(0,5)

$$= \left[\frac{1}{3} z^3\right]_2^3 \cdot \left[r\right]_0^4 \cdot \left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{19}{3} \cdot 4 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{152\pi}{3}$$

$\boxed{P05}$