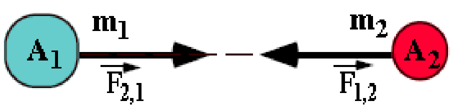
VI Nature des forces

VI.1 Gravitation et poids

VI.1.1 Définition

La gravitation est une force attractive entre corps matériels. La loi Newtonienne de la gravitation s'énonce de la façon suivante : tout corps matériel A_1 de masse m_1 exerce en toute circonstance, sur tout autre corps A_2 de masse m_2 une force attractive $F_{1,2}$ égale et opposée à la force attractive $F_{2,1}$ qu'exerce A_2 sur A_1.



Cette force est définie par la relation suivante :

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1} = -G.\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}_{1-2}$$

Où G= $6.67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} : constante de gravitation universelle. Le singe négatif signale que la force est de sens inverse au vecteur $\vec{r}_{1-2}$ joignant le corps A_1 au corps A_2. Ceci traduit que la force est attractive.

Si l'on considère un vecteur unitaire $\vec{u}$ sur l'axe reliant les deux corps, il aura comme expression :

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_{1-2}}{r}$$

D'où :

$$\vec{F}_{1-2} = -G.\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

Si m_2 représente la masse d'un corps distant de la distance « r » au centre de la terre cette force ne sera que la force du poids :

$$\vec{p} = m_2.\vec{g}$$

D'où

$$\vec{p} = m_2.\vec{g} = -G.\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u} = \vec{F}_{1-2}$$

Par identification nous retrouvons l'expression de l'accélération de la gravité

$$\vec{g} = -G.\frac{m_1}{r^2}\vec{u}$$

Avec : m_1 : masse de la terre.

Le poids « p » est évalué en Newton, « N » dans le SI.

VI.1.2 Centre de gravité

Sur chaque particule soumise au champ gravitationnel de la terre s'exerce la force du poids $\vec{p}$ définie précédemment par :

$$\vec{p} = m.\vec{g}$$

Le poids d'un corps constitué de « n » particules est donné par la relation :

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} m_i g = g \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Le point d'application de P est donné par la relation suivante :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i g} = \frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{g \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

On procède de la même manière pour calculer Y_G et Z_G pour un système à trois dimensions

x , y, z.

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Le point définit par ces dernières équations est appelé centre de gravité du système de « n » particules.

$$G = (X_G, Y_G, Z_G)$$

Si l'on considère maintenant un système très dense de particules distribuées sur un volume, nous pouvons supposer qu'il s'agit d'une structure continue (un solide) et homogène.

Nous allons alors définir en chaque point du solide la masse volumique « $\boldsymbol{\rho}$ » associée à une infinité d'éléments de volume « **dv** » de masse « **dm** » par la relation :

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

Les coordonnées du centre de gravité du solide seront alors données par :

$$X_G = \frac{\int_v \rho x dv}{\int_v \rho dv}$$

$$Y_G = \frac{\int_v \rho y dv}{\int_v \rho dv}$$

$$Z_G = \frac{\int_v \rho z dv}{\int_v \rho dv}$$

Puisque on a considéré que le solide est homogène alors « ρ » est constante on peut la faire sortir de l'intégrale et simplifier l'expression. On obtient :

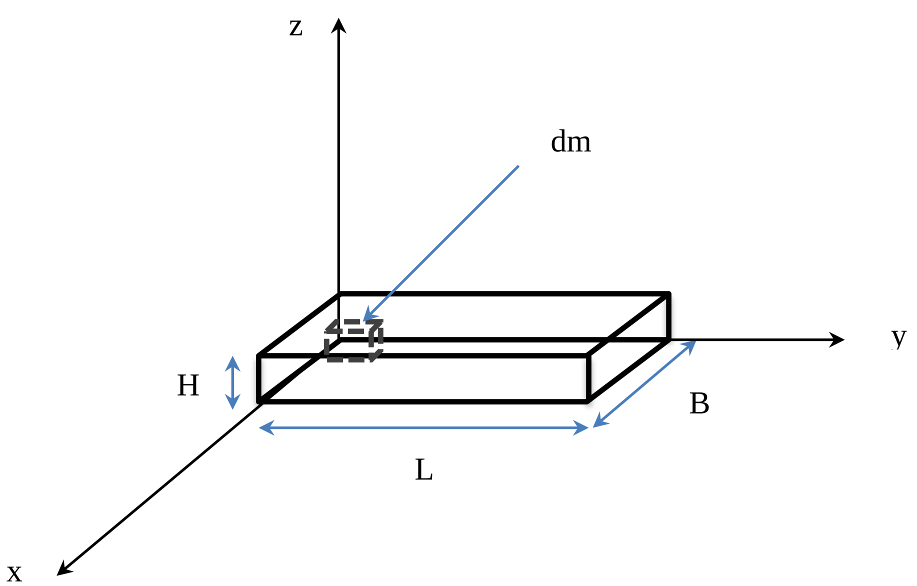
$$X_G = \frac{\int_v x dv}{\int_v dv}$$

$$Y_G = \frac{\int_v y dv}{\int_v dv}$$

$$Z_G = \frac{\int_v z dv}{\int_v dv}$$

Exemple :

Calculer le centre de gravité d'une barre homogène de longueur « L » et de section transversale (B*H).



Considérons un élément de volume dv = dx dy dz de masse dm.

$$X_G = \frac{\int_v \rho x dv}{\int_v \rho dv} = \frac{\rho \int_v x dv}{\rho \int_v dv} = \frac{\int_v x dv}{\int_v dv} = \frac{\iiint x dx dy dz}{dx dy dz}$$

$$X_G = \frac{\int_0^B x dx \int_0^L dy \int_0^H dz}{\int_0^B dx \int_0^L dy \int_0^H dz} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^B [y]_0^L [z]_0^H}{[x]_0^B [y]_0^L [z]_0^H} = \frac{\frac{B^2}{2} * L * H}{B * L * H} = \frac{B}{2}$$

On procède de la même manière pour calculer le Y_G *et le* Z_G.

On obtient :

$Y_G = \frac{L}{2}$ et $Z_G = \frac{H}{2}$

VI.2 Forces de contact ou réactions d'appuis

De façon générale, les appuis s'opposent aux forces provoquant la mise en mouvement des objets. Nous avons vu que les conditions de la statique conduisent, pour des problèmes plan, à un système de trois équations. Les deux premières traduisent l'équilibre de translation selon les axes du repère, et la troisième, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan, traduit l'équilibre de rotation.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & (1) \\ \sum F_y = 0 & (2) \\ \sum M_{/p} = 0 & (3) \end{cases}$$

Lorsque les réactions introduisent trois inconnues, le système n'admet qu'une solution. Il est, dans ce cas, **isostatique**. Lorsque les actions introduisent plus de trois inconnues, le problème est mathématiquement indéterminé. Le système est dit **hyperstatique**. Pour lever l'indétermination, on a besoin d'équations supplémentaires qui sont fournies par la RDM. On ne s'intéresse cette année, qu'à des systèmes isostatiques.

Les appuis réels sont, d'un point de vue microscopique, des systèmes de forces complexes. On peut cependant modéliser ces réactions à l'aide de système de forces simples. On passe en revue, dans ce chapitre, les différents types d'appuis.

VI.2.1 Forces de frottement

Les forces de frottement ont pour effet de s'opposer au déplacement relatif de deux corps se trouvant en contact. Ces forces sont parallèles aux surfaces. On les désigne par "$\mathbf{R_t}$" (réaction tangentielle). Elles dépendent d'une part, de la force normale joignant les deux corps, que l'on désigne "$\mathbf{R_N}$" (réaction normale), et d'autre part, de la nature des surfaces en contact. Le matériau constituant le corps et la rugosité des surfaces sont les principaux paramètres définissant la nature de la surface. Ces deux paramètres sont pris en compte, dans le bilan des forces, par un coefficient, que l'on note **μ**. La force de frottement peut alors se mettre sous une forme simple :

$$R_t = \mu \, R_N$$

a) Frottements statiques

Le frottement statique intervient entre surfaces immobiles, l'une par rapport à l'autre. Ainsi, lorsqu'une force croissante est appliquée à un objet maintenu en équilibre par un appui, la force de frottement statique, entre les deux surfaces en contact, croît dans le même temps pour s'opposer au déplacement de l'objet. Cette force ne peut dépasser une valeur limite. On désigne par "R_{tmax}" cette valeur maximale. Ceci implique que pour une valeur limite de la force appliquée, la réaction due au frottement n'est plus suffisante pour empêcher la mise en mouvement de l'objet. Ceci se traduit, pour l'expression de la force de frottement par l'inégalité :

$$R_t \leq R_{tmax} = \mu_s \, R_N$$

μ_s : Coefficient de frottements statiques.

b) Frottements dynamiques

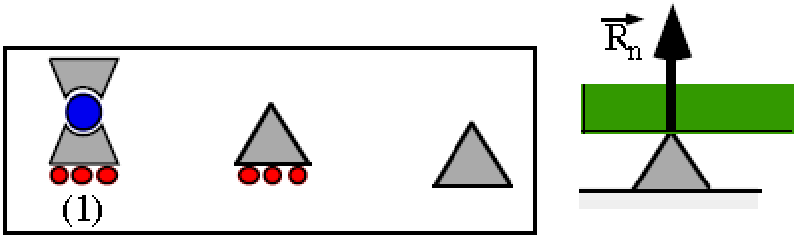
Lorsque les deux objets sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, une force de frottement persiste et réduit la vitesse de déplacement. Les frottements dans ce cas sont dits dynamiques. Leur expression est la suivante;

$$R_t = \mu_D \, R_N.$$

Ces forces ont une valeur qui est ordinairement inférieure au maximum atteint par la force de frottement statique.

VI.2.2 Appuis simples

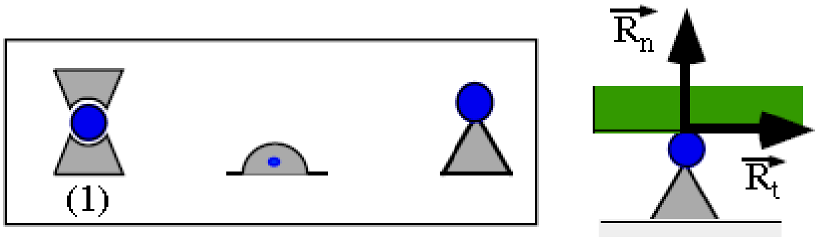
L'appui simple représente les réactions mises en jeu lorsque l'on pose un objet sur un autre. Dans ce cas, la réaction est décrite par une force dont la direction et le point d'application sont connus, la direction étant bien sûr la normale à la surface de contact. Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'intensité de la force. Cette réaction est désignée par différents symboles. On montre ici quelques-uns de ces symboles :



Cet appui permet 2 degrés de liberté : la translation, de la structure étudiée, par rapport à la surface d'appui, et la rotation autour du point d'application. C'est typiquement la situation que l'on rencontre lorsqu'on pose un objet sur un pivot.

VI.2.3 Appuis articulés

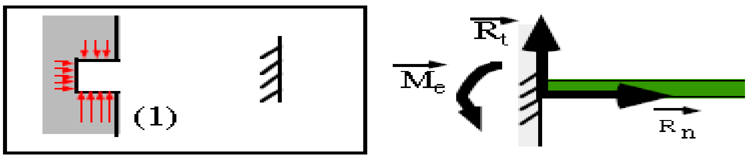
L'appui articulé, également appelé appui double, modélise toutes les liaisons réalisées à l'aide d'une articulation. Contrairement à l'appui simple, on ne connaît pas la direction de la force. Donc, cette fois, on doit déterminer deux inconnues, qui sont l'intensité et la direction.



Cet appui permet 1 degré de liberté, la rotation autour du point d'application. Il est commode de décomposer cette réaction en une composante normale à la surface d'appui et une composante parallèle à cette surface.

VI.2.4 Encastrements

Comme son nom l'indique, l'encastrement est obtenu en emboîtant la structure étudiée. Dans ce cas, ni la direction ni le point d'application de la force ne sont connus. La méconnaissance du point d'application est due au fait que chaque côté de l'encoche oppose des réactions. En effet, si l'on regarde en détail le contact entre les deux objets (voir le symbole (1) sur la figure suivante), on remarque que chacun des côtés oppose des réactions différentes réparties sur toute la surface de contact. La conséquence de l'ensemble des réactions produites, qui fait tout l'intérêt de ce type d'appui, est d'empêcher toute rotation de la structure. En d'autres termes, il produit un moment contraire aux moments imposés à la structure que l'on appelle moment d'encastrement. Ainsi, pour définir la réaction, on doit déterminer trois inconnues qui sont, l'intensité, la direction, et le moment d'encastrement.



Cet appui ne permet aucun degré de liberté. Cette réaction se décompose en trois éléments qui sont, la réaction normale à la surface d'appui, la réaction parallèle à cette surface et le moment d'encastrement (voir figure).

On peut dire, en guise de conclusion concernant les forces de contact, que le point important dans la description d'une liaison réaliste réside dans le choix de l'appui théorique qui le modélisera le plus fidèlement possible.