Calcul vectoriel

***Exercice 1** On considère l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les trois vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{v} &= 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{w} &= 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}. \end{aligned}$$

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

***Exercice 2** L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (1/2)\vec{i} + (\sqrt{3}/2)\vec{k} \\ \vec{v} &= (\sqrt{3}/2)\vec{i} - (1/2)\vec{k} \\ \vec{w} &= -\vec{j}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Calculer les normes de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, puis les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

Exercice 3 L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Etablir l'identité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}.$$

Indication : effectuer un calcul composante par composante.

***Exercice 4** Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM}.\vec{BM} = 0$. (Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Représenter ces deux ensembles sur un dessin.
4. Considérer le mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$

***Exercice 5** Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$.

***Exercice 6** Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions.

1. Etablir l'identité

$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 + \|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = 2(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2).$$

2. Montrer que pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que

$$\|\vec{U}+\vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2.$$

***Exercice 7** Trouver l'angle θ entre les vecteurs joignant (dans un repère orthonormé) l'origine aux points $P_1 \equiv (1,2,3)$ et $P_2 \equiv (2,-3,-1)$.

***Exercice 8** On considère dans un repère orthonormé les trois points $P_1 \equiv (1,1,1)$, $P_2 \equiv (1,2,3)$ et $P_3 \equiv (0,0,2)$. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{OP_1}$, $\vec{v} = \vec{OP_2}$ et $\vec{w} = \vec{OP_3}$.

***Exercice 9** Ecrire les équations de la droite passant par $P_0 \equiv (1,2,3)$ et parallèle à $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Soient $A \equiv (3,1,-1)$ et $B \equiv (1/2, 9/4, 4)$. Lequel de ces points est situé sur la droite ?

***Exercice 10** Soient P_0 et P_1 deux points de l'espace $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'un point P appartient au segment P_0P_1 si et seulement si

$$\text{il existe } t \in [0,1] \text{ tel que :} \qquad \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}.$$

Trouver une expression pour l'ensemble des points appartenant au segment de $\mathbb{R}^2$ entre $P_0 \equiv (1,2)$ et $P_1 \equiv (3,5)$.

RAPPEL On dit qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si pour tout $P_0 \in E$ et $P_1 \in E$, le segment entre P_0 et P_1 est contenu dans E.

Exercice 11 Préciser si les ensembles de définition des fonctions suivantes sont des ensembles convexes :

$$f(x,y) = \sqrt{y-x^2}, \qquad f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x+y+1}}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{y-x}\right)\right).$$

Exercice 12 Ecrire l'équation du plan tangent au point $H \equiv (1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ à la sphère centrée en $C \equiv (1,0,0)$ et de rayon 2.

***Exercice 13** Soit $P_0 \equiv (1,2,3)$. Ecrire l'équation du plan

1. passant par P_0 et orthogonal à $\vec{u} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$.
2. passant par P_0 et parallèle à $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.
3. passant par P_0, $P_1 \equiv (3,-2,1)$ et $P_2 \equiv (5,0,-4)$.

Exercice 14 Montrer que le module de la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ est égale à $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|}$. Trouver la plus courte distance d séparant le point $P_0 \equiv (1,2,3)$ et le plan d'équation $3x - 2y + 5z - 10 = 0$.