Université de Toulon
L1 Maths/PC/Info

Mécanique/Statique
Année 2006/2007

# Td 1 : Produit Vectoriel

## Exercice 1

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé. On pose $\vec{U} = \vec{\imath}$, $\vec{V} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{W} = \vec{\jmath}$. Calculer $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$ puis $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$ et conclure.

## Exercice 2

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soient $A(6, 2, 4)$, $B(2, 1, 1)$ et $C(\alpha, 3, 7)$ trois points de l'espace, où $\alpha$ est un nombre réel.

1. A quelle condition le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est-il unitaire ?
2. A quelle condition $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BO}) \cdot \vec{k} = 1$ ?
3. A quelle condition les points $A$, $B$ et $C$ sont-ils alignés ?
4. A quelle condition $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils perpendiculaires ?

## Exercice 3

1. Montrer que $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$.
2. Montrer que $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A}$.

## Exercice 4

Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit $\vec{V} = (\alpha, \beta, 0)$ un vecteur unitaire.

1. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{U}$ défini tel que $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{k}$.
2. Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire au vecteur $\vec{V}$ et passant par le point $P$ de coordonnées $(x_P, y_P, 0)$.

# Exercice 5

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Soit $C$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$ situé dans le plan $(O, x, y)$. Soit $P$ un point du cercle, tel que $(OP)$ forme un angle $\theta$ avec l'axe $(Ox)$ (avec $0 < \theta < \pi/2$).

1. Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.

2. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}$ tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit orthonormée directe.

3. En déduire l'équation de la droite $(D)$ tangente au cercle au point $P$.

4. Soit $A$ le point d'intersection entre $(D)$ et $(Ox)$, et $B$ entre $(D)$ et $(Oy)$. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis sa norme. Discuter les cas : $\theta = \pi/4$, $\theta \to 0$, $\theta \to \pi/2$.

# Exercice 6

Soient $B_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $B_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$, $B_2 = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ et $B_3 = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quatre bases orthonormées directes de $\mathbb{R}^3$, définies telles que :

- $B_1$ s'obtient de $B_0$ par une rotation d'angle $\psi$ autour de $\vec{k}$.
- $B_2$ s'obtient de $B_1$ par une rotation d'angle $\theta$ autour de $\vec{u}$.
- $B_3$ s'obtient de $B_2$ par une rotation d'angle $\phi$ autour de $\vec{z}$.

Les angles $(\psi, \theta, \phi)$ sont appelés angles d'Euler.

1. Exprimer dans $B_0$ les vecteurs unitaires de $B_1$, $B_2$ et $B_3$, puis les vecteurs $\vec{\imath} \wedge \vec{u}$ ; $\vec{v} \wedge \vec{\imath}$ ; $\vec{\jmath} \wedge \vec{z}$ ; $\vec{k} \wedge \vec{x}$ ; $(\vec{w} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{\imath}$.

2. Soit $\vec{\Omega} = \alpha\vec{k} + \beta\vec{u} + \delta\vec{z}$. Exprimer $\vec{\Omega}$ dans chacune des bases. Calculer $(\vec{\Omega} \wedge \vec{k}) \cdot \vec{x}$ et $(\vec{\Omega} \wedge \vec{x}) \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{k})$.