*Calcul vectoriel- Receuil d'exercices*

*A. Bourrass et E. Zerouali*
*SM-SMI*

*Septembre 2007*

CHAPTER 1

# Calcul vectoriel

**Exercice 1 :** Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs libres de représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en un point $O$ de l'espace. Montrer que les représentants de $\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}$ et de $\overrightarrow{U}-\overrightarrow{V}$ sont portés par les diagonales du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

**Rep.** Par construction $\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}=\overrightarrow{OS}$, où $S$ et l'unique point tel que $OASB$ soit un parralélograme. Donc $\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}$ est porté par la première diagonale de ce parallélogramme. D'un autre coté on a

$\overrightarrow{U}-\overrightarrow{V}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{BO}$

est donc c'est la première diagonale du parralélogramme $BSAO$,ce qui correspond à la deuxième diagonale du parralélogramme $OASB$.

**Exercice 2:** L'espace intuitif étant assimilé à un ensemble de points et noté $\mathcal{E}$, soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ l'application définie pour tout $M\in\mathcal{E}$ par $f(M)=M'$, avec $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{U}$ avec $\overrightarrow{U}$ un vecteur libre donné. L'application $f$ est appelée translation définie par $\overrightarrow{U}$.

1) Montrer que si $f(M)=M'$ et $f(N)=N'$, alors $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont équipollents ainsi que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ .

2) Soit $ABCD$ un parallélogramme, $A'=f(A)$ , $B'=f(B)$, $C'=f(C)$ *et* $D'=f(D)$. Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$? Soit $I$ le point d'intersection des diagonales de $ABCD$ et $I'$ celui des diagonales de $A'B'C'D'$. Montrer que $f(I)=I'$.

3) Montrer que les segments de droite $CA', BD'$ et $AC'$ se rencontrent en un point $J$ qui est le milieu de chacun d'eux. Montrer que $J$ est le milieu de $II'$.

4) Soit $f_i$ les translations définies par $\overrightarrow{U}_i$ , $i=1,2$. Déterminer le vecteur associé à $f_2\circ f_1$ et montrer que $f_2\circ f_1=f_1\circ f_2$.

**Rep.** 1) On a $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{U}=\overrightarrow{NN'}$ et par suite ils sont équipollents. On aussi $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'N}=\overrightarrow{NN'}+\overrightarrow{M'N}=\overrightarrow{M'N}$, ce qui donne que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont équipollents.

2) Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents et donc $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ le sont aussi. De même pour les vecteurs $\overrightarrow{B'D'}$ et $\overrightarrow{C'A'}$. Ce qui implique que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Si $I$ le point d'intersection des diagonales de $ABCD$ , on aura $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont q́uipollents ainsi que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IC}$. Il en serait alors de même pour les vecteurs $\overrightarrow{A'I'}$ et $\overrightarrow{I'D'}$ et pour les vecteurs $\overrightarrow{B'I'}$ et $\overrightarrow{I'C'}$. Finalement $I'$ est le point d'intersection des diagonales de $A'B'C'D'$.

**Exercice 3** Soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ définie par $f(M)=M'$ avec $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ et $g:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ définie par $g(M)=M''$ avec $M''$ tel que $\overrightarrow{MM''}=3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

i) Calculer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MM''}$ en fonction de $\overrightarrow{MG_2}$ où $G_1$ et $G_2$ sont les barycentres respectifs des systèmes pondérés $\{(A,1),(B,-1),(C,2)\}$ et $\{(A,3),(B,-1),(C,1)\}$. Quelle est la nature de $f$ et de $g$ ?

ii) Soit $\overrightarrow{u}\in\mathcal{V}$, $I\in\mathcal{E}$ et $\Delta$ la droite $D(I,\overrightarrow{u})$. Déterminer $f(\Delta)$ , $g(\Delta)$ et $f\circ g(\Delta)$.

**Rep.** On a $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{G_1A}-\overrightarrow{G_1B}+2\overrightarrow{G_1C}$ et $\overrightarrow{0}=3\overrightarrow{G_2A}-\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{G_2C}$ et par suite

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MG_1}+\overrightarrow{G_1A}-\overrightarrow{MG_1}-\overrightarrow{G_1B}+2\overrightarrow{MG_1}+2\overrightarrow{G_1C}=2\overrightarrow{MG_1}$

$\overrightarrow{MM''}=3\overrightarrow{MG_2}+3\overrightarrow{G_2A}-\overrightarrow{MG_2}-\overrightarrow{G_2B}+\overrightarrow{MG_2}+\overrightarrow{G_2C}=3\overrightarrow{MG_2}$

Les points $(M, G_1, M')$ sont alignés (ainsi que $(M, G_2, M")$). Il en découle que $f$ est une homothétie de centre $G_1$ et de rapport 2. ($g$ est une homothétie de centre $G_2$ et de rapport 3).
ii) On a $M \in D(I, \overrightarrow{u})$ si et seulement si il existe $\alpha \in R$ tel que $\overrightarrow{IM} = \alpha\overrightarrow{u}$. Soit $I'$ l'image de $I$ par $f$. On aura : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}$. On a donc

$$\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{I'I} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{II'} = 3\alpha\overrightarrow{u}.$$

Finalement $f(\Delta)$ est la droite (parallèlle à $\Delta$) passant par $I'$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. De même $g(\Delta)$ est la droite (parallèlle à $\Delta$) passant par $I"$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $f \circ g(\Delta)$ est la droite (parallèlle à $\Delta$) passant par $f \circ g(I)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

**Exercice 4 :** Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$; deux vecteurs libres de représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ non équipollents, et $\alpha, \beta$ deux réels $> 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Soit $O$ un point quelconque de l'espace et un point $C$ tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB} = \beta\overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{OC}$ est un représentant (en $O$) du vecteur libre $\beta\overrightarrow{U} + \alpha\overrightarrow{V}$ (utiliser des triangles semblables à $OAB$). En particulier, si $C$ est le milieu du segment $AB$ alors $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ pour tout point $O$ de l'espace.

2) Déduire de ce qui précède que:

i) les médianes d'un triangle sont concourantes en un point qui divise chacune d'elles dans un rapport $\frac{2}{1}\left(= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)$.

ii) les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux;

**Rep.** 1) On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AB} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB} = \beta\overrightarrow{U} + \alpha\overrightarrow{V}$ En particulier, si $C$ est le milieu du segment $AB$ on aura $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et en appliquant ce qui précède, on obtient $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ pour tout point $O$ de l'espace.
2) i) Soit $ABC$ un triangle, $D$ le milieu de $BC$ et $O$ un point quelconque de l'espace. Soit $X$ le point de $AD$ tel que $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. D'après ce qui précède on a $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Appliquons ce qui précède à $A, D$ et $C = X$ avec $\alpha = \frac{2}{3}$, on aura $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC})$. Donc $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. On voit que cette égalité est indépendante de la médiane $AD$ issue de $A$. Autrement dit, on obtiendra la même formule en considérant les milieux $E$ et $F$ de $AB$ et $AC$ respectivement. Donc le point $X$ vérifiant $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ vérifie aussi $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$. En conclusion, les trois médianes $AD, BF$ et $CE$ se coupent au même point $X$ qui divise chacune d'elle dans le rapport $\frac{2}{1}\left(= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)$.
ii) Par défintion de la relation d'équipollence, les diagonales du parallélogrammes $ABCD$ se coupent en leurs milieux car les vecteurs qui constituent les cotés sont équippollents deux à deux. On peut aussi retrouver le résultat en effectuant des calculs analogues à la question précédente.

**Exercice 5 :** Soit $A, B, C, D$ quatre points non coplanaires, $m \in \mathbb{R}$ et $I, J$ les milieux des segments $AB$ et $CD$. Soit $G_m$ le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)$.

i) Déterminer $G_1$ et $G_2$.

ii) Montrer que $G_2$ est le milieu de $G_1J$.

iii) Montrer que $\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$. Quel est le lieu de $G_m$ lorsque $m$ parcourt $\mathbb{R}$ ?

iv) Vérifier que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

**Rep.** i) Par définition, on a

$$\overrightarrow{OG_m} = \frac{1}{1+1+m-2+m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD})$$

et par suite:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \text{ et } \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD})$$

ii) $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} = \frac{-1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ et
$\overrightarrow{G_2J} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{G_1G_2}$.
Ce qui montre que $G_2$ est le milieu de $G_1J$.

iii) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IG_m} &= \overrightarrow{OG_m} - \overrightarrow{OI} \\
&= \frac{1}{2m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) - \overrightarrow{OI} \\
&= \frac{1}{m}\overrightarrow{OI} + \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI} \\
&= \frac{m-2}{2m}(\overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0I}) + +\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI}) \\
&= \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.
\end{aligned}$$

iv) $m\overrightarrow{JG_m} = m(\overrightarrow{OG_m} - \overrightarrow{OJ}) = m(\frac{1}{2m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) - \frac{m}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CI}$
On a donc $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{GI}$ et par suite le point $G_m$ parcourt une droite passant par $J$ mais privée de ce point $J$.

**Exercice 6 :** Soit $A, B, C, D$ quatre points non coplanaires et $k \in \mathbb{R}$. Soit les points $E$ *et* $F$ tels que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = k\overrightarrow{BC}$. Soit $I, J, H$ les milieux respectifs de $AB, CD$ et $EF$.

i) Montrer que les points $I, J, H$ sont colinéaires.

ii) Déterminer l'ensemble des points $H \in \mathcal{E}$ lorsque $k$ varie dans $\mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de $k$ qui correspendent à $H = J$ et à $H = I$ ?

**Rep.** i) Des relations $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ et $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$, il vient $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{IJ}$ et donc les points $I, J, H$ sont colinéaires.
ii) D'après la question précédente, $H$ parcourt la doite passant par $I$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$.
Si $H = J$, cela voudrait dire que $H$ est aussi le milieu de $CD$. Et comme $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont équipollents, on déduit que $E = B$ et $F = D$, et par suite que $k = 1$. Par le même argument si $H = I$, on obtient $k = 0$.

**Exercice 7 :** Soit trois points $A, B, C$. Soit $G_1, G_2$ et $G$ les barycentres des systèmes pondérés $\{(A, a_1), (B, b_1), (C, c_1)\}, \{(A, a_2), (B, b_2), (C, c_2)\}$, et $\{(A, a_1 + \lambda a_2), (B, b_1 + \lambda b_2), (C, c_1 + \lambda c_2)\}$ respectivement, $\lambda$ étant un nombre réel non nul. Etablir la relation

$(a_1 + b_1 + c_1)\overrightarrow{G_1G} + \lambda(a_2 + b_2 + c_2)\overrightarrow{G_2G} = \overrightarrow{0}$ et en déduire que les trois points sont alignés.

**Rep.** Par dédinition des barycentre $G_1, G_2$ et $G$ on a:
$(a_1 + b_1 + c_1)\overrightarrow{GG_1} = a_1\overrightarrow{GA} + b_1\overrightarrow{GB} + c_1\overrightarrow{GC}$, $(a_2 + b_2 + c_2)\overrightarrow{GG_2} = a_2\overrightarrow{GA} + b_2\overrightarrow{GB} + c_2\overrightarrow{GC}$ et
$\overrightarrow{0} = (a_1 + \lambda a_2 + b_1 + \lambda b_2 + c_1 + \lambda c_2)\overrightarrow{GG} = (a_1 + \lambda a_2)\overrightarrow{GA} + (b_1 + \lambda b_2 +)\overrightarrow{GB} + (c_1 + \lambda c_2)\overrightarrow{GC}$.

Multiplions la deuxième égalité par $\lambda$ et additionnons la avec la première:
$(a_1 + b_1 + c_1)\overrightarrow{GG_1} + \lambda(a_2 + b_2 + c_2)\overrightarrow{GG_2} = (a_1 + \lambda a_2)\overrightarrow{GA} + (b_1 + \lambda b_2 +)\overrightarrow{GB} + (c_1 + \lambda c_2)\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
Cette égalité signifie que $\alpha\overrightarrow{GG_1} + \beta\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{0}$ avec
$\alpha = a_1 + b_1 + c_1$ et $\beta = a_2 + b_2 + c_2$. C'est à dire que les trois points $G, G_1$ et $G_2$ sont alignés.

**Exercice 8 :** Soit $G$ et $G'$ les isobarycentres des points supposés distincts $A, B, C$ et $A', B', C'$. Etablir la relation

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{Bc'} + \overrightarrow{Ca'} = 3\overrightarrow{GG'}$;

**Rep.** $G$ et $G'$ étant les isobarycentres des points $A, B, C$ et $A', B', C'$, on a
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{0}$.
Evaluons la somme demandée
$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
Les mêmes calculs conduisent à la deuxième égalité $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$ .

**Exercice 9:** L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit les points $A(0, 0, a)$ et $A'(0, 0, -a)$ avec $a > 0$.

i) Donner les équations vectorielles et cartésiennes des droites $D\left(A,\overrightarrow{i}\right)$ et $D\left(A',\overrightarrow{j}\right)$.

ii) Soit $\alpha$ l'abscisse d'un point quelconque de $D\left(A,\overrightarrow{j}\right)$ et $\beta$ l'ordonnée d'un point quelconque de $D\left(A',\overrightarrow{j}\right)$. Donner les coordonnées du milieu $I$ de $MM'$.

iii) On suppose que $M$ et $M'$ varient sur $D\left(A,\overrightarrow{j}\right)$ et $D\left(A',\overrightarrow{j}\right)$ de telle sorte que $MM'=l$ avec $l\geq 2a$ fixé. Déterminer analytiquement le lieu de $I$.

iv) Soit $H,H'$ les projections orthogonales de $M,M'$ sur le plan $z=0$. Montrer que $OI=\frac{1}{2}HH'$ et retrouver le résultat précédent.

v) On suppose maintenant que $M$ et $M'$ varient sur $D\left(A,\overrightarrow{j}\right)$ et $D\left(A',\overrightarrow{j}\right)$ de telle sorte que la projection orthogonale de $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$. Déterminer le lieu de $I$.

**Rep.** i) $M\in D\left(A,\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement $\exists\lambda\in R$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{i}$. Ce qui donne l'équation vectorielle. L'equation cartésiènne est alors $x=\lambda$ , $y=0$ et $z=a$. De même $M\in D\left(A',\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement $\exists\lambda\in R$ tel que $\overrightarrow{A'M}=\lambda\overrightarrow{j}$ et les equations cartésiènnes sont $x=0$ , $y=\lambda$ et $z=-a$.
ii) $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'})=\frac{1}{2}(\alpha\overrightarrow{i}+\beta\overrightarrow{j})$
iii) On a $MM'^2=\alpha^2+\beta^2+4a^2$, donc si $MM'=l$, on aura $OI^2=\alpha^2+\beta^2=l^2-4a^2$. Ce qui implique que $I$ parcout un cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{l^2-4a^2}$.
iv) On a $H(\alpha,0,0)$ et $H'(0,\alpha,0)$ et donc $HH'=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2OI$ ce qui donne le résultat recherché. Le résultat précédent est alors obtenu, on observant que $HH'$ est constant.
v) Si $\overrightarrow{HH'}=\lambda\overrightarrow{u}$, pour un vecteur fixe $u=b\overrightarrow{i}+c\overrightarrow{j}$ on obtient $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\alpha\overrightarrow{i}+\beta\overrightarrow{j})=b\overrightarrow{i}+c\overrightarrow{j}$ ce qui donne $\alpha=a\lambda$ et $\beta=b\lambda$ qui est l'equation de la droite passant par $O$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

**Exercice 10:** a) Déterminer deux vecteurs engendrant le plan d'équation cartésienne $2x+3y-z-1=0$

b) Soit les vecteurs libres $\overrightarrow{V_1}(1,0,1)$ , $\overrightarrow{V_2}(0,2,-1)$ et les points $A(2,1,1)$ , $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Donner les équations cartésiennes du plan $P\left(A,\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)$ et de la droite $D\left(B,\overrightarrow{V}\right)$ avec $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V2}$.

**Rep.** a) Les plans d'equations $P_1: 2x+3y-z-1=0$, et $P_0: 2x+3y-z=0$ ont les mêmes vecteurs directeurs. Puisque $(0,0,0)\in P_0$, pour un point $M(x,y,z)\in P_0$, on a $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)=x,y,2x+3y)=x(1,0,2)+y(0,1,3)$. Donc $P_1$ est engendrée par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}=(1,0,2)$ et $\overrightarrow{v_2}=(0,1,3)$.

b) $M(x,y,z)\in P\left(A,\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)$ si et seulement si, $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{V_1}+\beta\overrightarrow{V_2}$. Ceci donne le système d'équations paramétriques suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& \alpha\\ y-1 &=& 2\beta\\ z-1 &=& 2\alpha-\beta\end{array}\right.$$

En ecrivant $4L_1-L_2+2L_3$, on obtient $4x-y+2z-7=0$, ce qui représente léquation cartésiènne du plan.

On a $M(x,y,z)\in D\left(B,\overrightarrow{V}\right)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{V}$, ce qui conduit aux équations paramétriques de la droite

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& \lambda\\ y-\frac{1}{2} &=& -2\lambda\\ z-\frac{1}{2} &=& 2\lambda\end{array}\right.$$

et en considérant $2L_1+L_2$ et $L_2+L_3$, on aboutit aux équations cartésiènnes

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-\frac{5}{2} &=& 0\\ y+z-1 &=& 0\end{array}\right.$$

**Exercice 11:** L'espace étant rapporté à un repère, soit $A$ et $B$ deux points quelconques de l'espace. On considère les vecteurs $\overrightarrow{U_1}(0,1,2)$ ; $\overrightarrow{U_2}(1,2,3)$ ; $\overrightarrow{V_1}(1,1,1)$ ; $\overrightarrow{V_2}(-1,0,1)$

1) Montrer que les plans $P\left(A,\overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2}\right)$ et $P\left(B,\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right)$ sont parallèles

2) Montrer que les deux plans $P\left(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ et $P\left(A, \overrightarrow{W_1}, \overrightarrow{W_2}\right)$ sont confondus, avec $\overrightarrow{U}\,(1,-2,1)$ , $\overrightarrow{V}\,(-1,1,1)$ , $\overrightarrow{W_1}\,(-1,0,3)$ et $\overrightarrow{W_2}\,(0,-1,2)$.

3) Determiner la droite intersection des deux plans $P\left(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ et $P\left(A, \overrightarrow{S}, \overrightarrow{W_2}\right)$ où $\overrightarrow{S}\,(1,-1,1)$.

**Rep.** 1) Les Plans $P(A, \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2})$ et $P(B, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. C'est a dire si et seulement si les vecteurs $U_1 \wedge U_2$ et $V_1 \wedge V_2$ sont colinéaires, On a $U_1 \wedge U_2 = (-1,2,-1)$ et $V_1 \wedge V_2 = (1,-2,1) = -U_1 \wedge U_2$.

On peut aussi remarquer que $U_1 = V_1 + V_2$ et $U_2 = 2V_1 + V_2$ pour dire que les Plans $P(A, \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2})$ et $P(B, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ sont parallèles

2) Comme les deux plans $P(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ et $P(A, \overrightarrow{W_1}, \overrightarrow{W_2})$ passent par le même point, il suffit de montrer que $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont coplanaires avec $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$. On peut remarquer pour cela que $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{W_2} - \overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{W_1} - \overrightarrow{W_2}$.

3) Soit $\overrightarrow{T}$ un vecteur directeur de la droite $P(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) \cap P(A, \overrightarrow{S}, \overrightarrow{W_2})$. Comme $A \in D(A, \overrightarrow{T})$, pour déterminer $\overrightarrow{T}$, il suffit de trouver un vecteur qui est coplanaire à la fois aux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ et aux vecteurs $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{W_2}$. D'après la question 2), on a $\overrightarrow{W_2} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ est donc coplanaire à $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$. Il est en plus coplanaire à $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{W_2}$. On peut alors prendre $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{W_2}$. $P(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) \cap P(A, \overrightarrow{S}, \overrightarrow{W_2}) = D(A, \overrightarrow{W_2})$

**Exercice 12:** On considère les vecteurs libres $\overrightarrow{U}\,(1,-2,1)$ , $\overrightarrow{V}\,(-1,1,1)$ , $\overrightarrow{W}(1,-1,1)$ et les points $A\,(0,-1,2)$ , $M\,(1,-2,3)$ , $N\,(1,0,1)$ dans un repère de l'espace.

i) Montrer que $A$ est sur le plan $P\left(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$.

ii) Donner les coordonnées des projections sur $D\left(O, \overrightarrow{W}\right)$ parallèlement à $P\left(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ des points $A, M, N$.

ii) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ comme sommes d'un vecteur sur $D\left(O, \overrightarrow{W}\right)$ et d'un vecteur sur $P\left(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$.

**Rep.** i) $A \in P(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) \iff \exists \alpha, \beta$ réels tels que $\overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V}$. C'est à dire $0 = \alpha - \beta$, $-1 = -2\alpha + \beta$ et $2 = \alpha + \beta$. Une solution de ce système est $\alpha = \beta = 1$. Donc $A \in P(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$.

ii) Les projections des points $A, M$ et $N$ sur $D\left(O, \overrightarrow{W}\right)$ parallèlement à $P\left(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ sont les points $A', M'$ et $N'$ définis par $A' = D(O,W) \cap P\left(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$,$M' = D(O,W) \cap P\left(M, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ et $N' = D(O,W) \cap P\left(N, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$. On fait les calculs pour le point $A$, les autres points s'obtiennent de manière similaire.

$A'(x', y', z') \in D(O, \overrightarrow{W}) \iff \exists \alpha \in R; \overrightarrow{OA} = \alpha\overrightarrow{W}$

$A'(x', y', z') \in P\left(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) \iff \exists \beta, \gamma / \overrightarrow{AA'} = \gamma\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V}$

D'où le système d'equations $\left\{ \begin{array}{ll} x' = \alpha & , y' = -\alpha \quad , z' = \alpha \\ x' = \gamma - \beta y' + 1 = -2\gamma + \beta, z' - 2 = \gamma + \beta & \end{array} \right.$

Il faut donc résoudre ce système a six inconnues et six equations. De la première ligne vient $x' = -y' = z'$ puis dans la deuxième ligne, on obtient $\beta = \gamma = -1$. D'où $x' = y' = z' = 0$, $A' = O$ (Ceci provient du fait que $A \in P\left(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$)

iii) Rappelons que tout vecteur lié sur le plan $P\left(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ s'écrit sous la forme $\alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V}$ avec $\alpha, \beta$ réels. Il s'agit donc de trouver $\alpha, \beta$ et $\gamma$ tels que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{V} + \gamma\overrightarrow{W}$. D'où le système d'équations

$$1 = \alpha - \beta + \gamma, \;\; 2 = -2\alpha + \beta - \gamma; \; 3 = \alpha + \beta + \gamma$$

dont la solution est $\alpha = \beta = \gamma = 1$ et par conséquent $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) + \overrightarrow{W}$.

Le système d'equations associé a $N$ est

$$1 = \alpha - \beta + \gamma, \;\; 0 = -2\alpha + \beta - \gamma; \; 1 = \alpha + \beta + \gamma$$

de solution $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{4}$ et $\gamma = \frac{3}{2}$. Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{W_1}$ avec $\overrightarrow{S_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{U} + \frac{3}{4}\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{W}$.

**Exercice 13:** Soit dans le plan $\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs libres. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$.

i) Soit $O$ un point du plan. Pour tout point $M$ du plan, on note $(x, y)$ ses coordonnées relativement au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $(x', y')$ ses coordonnées relativement à $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Ecrire les équations suivantes dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ : $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ ; $xy = 1$ ; $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 21 = 0$ .

**Rep.** Dans ce genre de problème, il faut exprimer les ainciennes coordonnés $(x, y)$ en fonction des nouvelles $(x', y')$ pour pouvoir les remplacer. Pour tout point $M(x, y) = M(x', y')$ du plan, on a $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x'\overrightarrow{U} + y'\overrightarrow{V}$. Avec les formules données, on a $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}x'\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}x'\overrightarrow{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\overrightarrow{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\overrightarrow{j}$ D'où $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$. On reporte dans chacune des équations données et on obtient la première:

$$5\frac{2}{4}(x' - y')^2 + 6\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + 5\frac{1}{2}(x' + y')^2 - 8 = 0$$

Après simplifications : $2x'^2 - y'^2 - 4 = 0$.

Pour la deuxième, on obtient $x'^2 - y'^2 = 2$.

# 2

**Exercice 1 :** 1) Soit un triangle $ABC$ et $M$ le milieu de $BC$. Montrer que

a $\quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b $\quad AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$

c $\quad 4AM^2 - BC^2 = 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

d $\quad AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA}$

2) 2) Soit $A, B, C, D$, quatres points de l'espace. Montrer que

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD}$

Si $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} \leq 0$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} \leq 0$ , alors $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \geq \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$

**Rep.** (1) a. $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b. On ecris $AB^2 + AC^2 = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} + AM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC} = 2AM^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + 2\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$

c. Il suffit d'utilier les deux premières relation $2(2) - (1)$ pour avoir le résultat recherché.

d. $AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} - (AM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{MB} - MC) = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA}$.

2) On a

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BD}\|^2.$$

En particulier si $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} \leq 0$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} \leq 0$ , on obtient $\|\overrightarrow{BD}\|^2 \leq \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} \leq \|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{BD}\|$ et finalement $\|\overrightarrow{BD}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$.

**Exercice 2** L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit les points $A(2, 0, 0); B(0, 4, 0), C(0, 0, 6)$.

1) Donner les équations vectorielle et cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A, B, C$. Montrer que la droite $D(O, \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}(1, -2, 0)$ est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

2) Soit $(\mathcal{Q})$ le plan d'équation $3y + 2z - 6 = 0$ . Donner les composantes d'un vecteur normal à $(\mathcal{Q})$ et vérifier que la droite $(OA)$ est parallèle à $(\mathcal{Q})$ .

3) Donner l'équation vectorielle de la droite intersection de $(\mathcal{P})$ et de $(\mathcal{Q})$

4) Soit $E(1, 2, 3)$ et $D(0, 2, 0)$, d"éterminer l 'intersection de $(\mathcal{P})$ et $(DE)$ ? Que représente cette intersection pour le triangle $ABC$?

5) Soit $\mathcal{S} = \left\{M, \quad \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 2MC^2\right\}$ , quelle est la nature de $\mathcal{S}$ ? Donner son équation cartésienne et déterminer $(P) \cap \mathcal{S}$

**Rep.** 1) $M \in P \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont coplanaires. Ce qui revient a dire que $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. On a $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24x + 12y + 8z - 48 = 0$

La droite $D(O, \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}(1, -2, 0)$ est parallèle au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont coplanaires, ou encore que $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. La dernière affirmation est facile a vérifier.

2) Les composantes de la normale à $(Q)$ sont $\overrightarrow{n_2}(0,3,2)$. Avec le même argument que précédement, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{n_2}=0$. Ceci se fais sans peine puisuqe $(2,0,0).(0,3,2)=0$.

3) Le vecteur directeur $\overrightarrow{\alpha}$ de la droite $(P)\cap(Q)$ est orthogonal aux normales de $(P)$ et de $(Q)$. on peut donc prendre $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=(0,-2,3)$. Il nous reste à trouver un point sur cette droite. Ce qu'on peut faire en résolvant le systèm obtenu à partir des équations de $(P)$ et $(Q)$.

$\left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y+2z-12 & = & 0 \\ 3y+2z-6 & = & 0 \end{array}\right.$ dont une solution est par exemple $(1,2,0)$.

Si on pose $H(1,2,0)$, l'équation vectorielle de $(P)\cap(Q)$ est celle de la droite $D(H,\overrightarrow{d})$.

4) Soit $G=(DE)\cap(P)$. Ce point $G$ est telque $DG=\lambda DE=(\lambda(1,0,3)$ et $G\in(P)$. Si $x,y,z$ sont les composante de $G$, on aura $x=\lambda, y=2, z=3\lambda$ et $6x+3y+2z-12=0$. On déduit les coordonnées de $G(\frac{1}{2},2,\frac{3}{2})$. On a $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. Donc $G$ est le barycentre su ststème pondéré $(A,1),(B,2),(C,1))$.

Nature de $S$: Pour un point $M(x,y,z)$, on a $\overrightarrow{CM}(x,y,z-6), \overrightarrow{AM}(x-2,y,z), \overrightarrow{BM}(x,y-4,z)$. Donc

$$\begin{array}{rcl} M(x,y,z)\in S & \Longleftrightarrow & x(x-2)+y^2+z(z-6)-x^2-y(y-4)-z(z-6)=2(x^2+y^2+z^2-12z+36) \\ & \Longleftrightarrow & -2x+4y=2(x^2+y^2+z^2-12z+36) \\ & \Longleftrightarrow & x^2+y^2+z^2-x-2y-12z+36=0 \\ & \Longleftrightarrow & (x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2+(z-6)^2=\frac{5}{4} \end{array}$$

$S$ est la sphere de centre $(\frac{-1}{2},1,6)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

L'intersection $S\cap(P)$ s'obtient en résolvant le système

$\left\{\begin{array}{rcl} x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2+(z-6)^2 & = & \frac{5}{4} \\ 6x+3y+2z-12 & = & 0 \end{array}\right.$

Comme le centre de la sphere appartient au plan $(P)$, cette inersection est le cercle di centre $(\frac{-1}{2},1,6)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (qui se trouve bien dans le plan;

**Exercice 3:** a) Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs libres. Montrer que $\overrightarrow{V}$ peut s'ecrire comme somme de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ , avec $\overrightarrow{V_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{U}=0$ . En déduire la relation $\left(\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}\right)^2+\left\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{U}\right\|^2\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2$.

b) Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs libres. Montrer que $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{V}$ si et seulement l'une des conditions suivantes est réalisée.

- Il existe un vecteur $\overrightarrow{W}$ tel que $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{W}$
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{W}$ , $\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{W}$
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{W}$ , $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{W}=\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{W}$

c) Etablir la relation du double produit vectoriel

$$\overrightarrow{U}\wedge\left(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{W}\right)=\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{W}\right)\overrightarrow{V}-\left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}\right)\overrightarrow{W}.$$

Déterminer le vecteur $\overrightarrow{X}$ sachant que $\overrightarrow{X}\cdot\overrightarrow{U}=p$ et $\overrightarrow{X}\wedge\overrightarrow{U}=\overrightarrow{V}$ , avec $p, \overrightarrow{U}$ *et* $\overrightarrow{V}$ donnés.

d) Démontrer que

$$\left(\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\right)\cdot\left(\overrightarrow{W}\wedge\overrightarrow{T}\right)=\left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{W}\right)\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{T}\right)-\left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{T}\right)\left(\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{W}\right).$$

e) Soit $A,B$ et $C$, trois points non alignés .Montrer que le vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$ est orthogonal au plan determiné par les points $A,B$ et $C$.

**Rep.** a) Il suffit de choisir $\overrightarrow{V_1}$ la projection orthogonal de $\overrightarrow{V}$ sur l'axe de direction $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V_2}$ la projection orthogonal de $\overrightarrow{V}$ sur le plan de normal $\overrightarrow{U}$. On a $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}$ avec $\overrightarrow{V_1}=\lambda\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V_1}=0$. Ainsi $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}=\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}=\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V_1}$. En plus $\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\|=\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V_2}\|=\|\overrightarrow{U}\|.\|\overrightarrow{V}\|$ et $\|\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}\|=\|\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V_1}\|=\|\overrightarrow{U}\|.\|\overrightarrow{V_1}\|$.

On en déduit $\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\|^2+\|\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}\|^2=\|\overrightarrow{U}\|^2(\|\overrightarrow{V_1}\|^2+\|\overrightarrow{V_2}\|^2)=\|\overrightarrow{U}\|^2\|\overrightarrow{V}\|^2$.

Car $\|\overrightarrow{V_1}\|^2+\|\overrightarrow{V_2}\|^2=\|\overrightarrow{V}\|^2$ du fait que $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=0$.

b) Il s'agit de montrer l'équivalence des 4 assertions suivantes $i)\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$, $ii)$ pour tout $\overrightarrow{W}$, on a $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} = \overrightarrow{0}$, $ii)$ pour tout $\overrightarrow{W}$, on a $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}.\overrightarrow{W} = \overrightarrow{0}$ et $iv)$ il existe $\overrightarrow{W} \neq \overrightarrow{0}$ telque, $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}.\overrightarrow{W} = 0$. Trivialement $i)$ implique les trois autres assertions. Montrons d'un autre coté chacune de ses assertions implique $i)$.
Supposons $ii)$ satisfaite et choisissons $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$ non nul. On aura $0 = \|(\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}\|\|\overrightarrow{W}\|$ et donc $0 = \|\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}\|$. Ce qui donne $i)$
Si $iii)$ est vérifiée, on aura en particulier $(\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}).(\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}) = 0$ et donc $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$.
Enfin si on a $iv)$, $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$ est _ a la fois orthogonal et colinéaire à $W$, ce qui entraine $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$.

c) On peut établir la relation analytiquement ou géomètriquement. On prsénte ici la méthode géomètrique: Soit $T = \overrightarrow{U} \wedge (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W})$. Puisque $\overrightarrow{T}.(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = 0$, on obtient $\overrightarrow{T}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}$ sont coplanaire. Il existe donc $\alpha, \beta$ des réels telque $\overrightarrow{T} = \alpha\overrightarrow{V} + \beta\overrightarrow{W}$. Comme $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{U} = 0$, on déduit que $\alpha\overrightarrow{V}.\overrightarrow{U} + \beta\overrightarrow{W}.\overrightarrow{U} = 0$. En particulier lorsque $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W}$ sont colinéaires de même sens, le vecteur $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{V}$ et de même sens. Comme $\|\overrightarrow{T}\| = \|\overrightarrow{U}\|\|\overrightarrow{V}\|\|\overrightarrow{W}\|$, on a $\overrightarrow{T} = (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{W}).\overrightarrow{V}$ et $\alpha = \overrightarrow{W}).\overrightarrow{V}$.

De même lorsque $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires de même sens, $T$ est colinéaire à $\overrightarrow{W}$ mais de sens opposé. Donc $\overrightarrow{T} = -(\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V})\overrightarrow{W}$ et $\beta = \overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}$.

Ce qui établit la formule du double produit véctoriel:

$$\overrightarrow{U} \wedge (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) = (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{W})\overrightarrow{V} - (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V})\overrightarrow{W}.$$

Si on forme le double produit $\overrightarrow{U} \wedge (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{U}) = (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{U})\overrightarrow{X} - (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{X})\overrightarrow{U} = \|\overrightarrow{U}\|^2\overrightarrow{X} - p\overrightarrow{U}$, on obtient la formule

$$\overrightarrow{X} = \frac{p\overrightarrow{X} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{U}\|^2}$$

d) On a

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}).(\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{T}) &= ((\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}), \overrightarrow{W}, \overrightarrow{T}) \\
&= (\overrightarrow{T}, (\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}), \overrightarrow{W}) \\
&= \overrightarrow{T}.((\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{W}) \\
&= -\overrightarrow{T}.[(\overrightarrow{W}.\overrightarrow{V})\overrightarrow{U} - (\overrightarrow{W}.\overrightarrow{U})\overrightarrow{V}] \\
&= (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{W}).(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{T}) - (\overrightarrow{W}.\overrightarrow{V}).(\overrightarrow{U}.\overrightarrow{T})
\end{aligned}$$

e) Il suffit de vérifier que le vecteur donné est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ qui'est normal au plan $(A, B, C)$. On a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

**Exercice 4:** Soit $A, B, C, D$ quatre points distincts de l'espace et $\mathcal{E} = \left\{M,\ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}\right\}$

1) Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque $A, B, C, D$ ne sont pas coplanaires

2) On suppose $A, B, C, D$ coplanaires, et soit $I$ tel que $\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{ID}$ . Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ dans chacun des cas suivants:
i) $(AB) \cap (CD) = \{O\}$
ii) $(AB) = (CD)$,
iii) $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

**Rep.** 1) On suppose $A, B, C, D$ non coplanaires. Alors les vecteurs $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$ ne sont pas colinéaires et dans ce cas l'ensemble $\mathcal{E}$ est réduit à $\emptyset$.

2) i) On suppose maintenant que On suppose $A, B, C, D$ sont coplanaires et que les droites $(AB)$ et $(CD)$ se coupent en un point $O$. On a:

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\iff \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \\
&\iff (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \wedge (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) \wedge (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\
&\iff \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

Mais par hypothèse $O, C, D$ sont alignés et $O, A, B$ alignés. Donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = 0$, d'où:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{CO} \\ &\iff \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{CD} \\ &\iff \overrightarrow{MO} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}), \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii) Sopposons maintenat que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont condondues. Dans ce cas le point $I$ est sur la droite $(AB) = (CD)$ et les calculs précédents restent valables avec le même argument $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{IM} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0}$. Si en plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $\mathcal{E}$ est l'espace tout entier. Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{IM} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$ et puisque $A, B, C, D$ sont alignés, $\mathcal{E}$ est la droite $(AB)$.

iii) Supposons enfin que $(AB)$ et $(CD)$ sont parrallèles disctincts. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $(AB)$ et $(CD)$ et soit $J \in (AB)$ et $K \in (CD)$ tels que $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{u} = 0$.(La droite $(JK)$ est perpendiculaire à $(AB)$ et $(CD)$). On a $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \beta\overrightarrow{u}$. et $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) \wedge (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) = \alpha\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{u}$. De même $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} = \beta\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{u}$.
Ainsi: $M \in \mathcal{E} \iff \alpha\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{u} = \beta\overrightarrow{MK} \wedge \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{u} \wedge (\alpha\overrightarrow{MJ} - \beta\overrightarrow{MK}) = \overrightarrow{0}$
Si $\alpha - \beta \neq 0$, soit $G$ le barycentre de $\{(J, \alpha), (K, -\beta)\}$, alors $M \in \mathcal{E} \iff \alpha\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et par conséquent $\mathcal{E} = D(G, \overrightarrow{u})$.
Si $\alpha - \beta = 0$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\alpha\overrightarrow{MJ} = \beta\overrightarrow{MK}$. D'où $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $\overrightarrow{u}$ et$\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires. Ce qui contredit le fait qu'il soient non nul orthogonaux. Donc $\mathcal{E} = \emptyset$.

**Exercice 5:** L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On rappelle la formule du double produit vectoriel $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\,\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{u}$ et on considère l'équation vectorielle

$(E) \quad (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$

a) Donner une condition nécessaire d'existence de solution de $(E)$

b) On suppose $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

- i) Montrer que si $\overrightarrow{x_0}$ est solution de $(E)$, alors $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
- ii) Trouver $\overrightarrow{x_0}$ tel que $\overrightarrow{x_0} = \lambda\,(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$
- iii) Trouver l'ensemble $S$ des solutions de $(E)$.

**Rep.**

$$(E) \quad \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{V}$$

a) Si l'équation $(E)$ admet une solution, on doit avoir nécessairement $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{V} = 0$

b) Soit $\overrightarrow{x}_0$ une solution de $(E)$
i) Si $x$ est aussi une solution de $(E)$, on a $(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ c'est a dire que $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
ii) Le fait que $\overrightarrow{x}_0 = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{V})$ soit solution de $(E)$ s'exprime par $\lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{V}$. Utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient $\lambda[(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{V} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{V})\overrightarrow{W}] = \overrightarrow{V}$, soit $\lambda[(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}$, ce qui implique que $\lambda = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$.

La solution recherché est donc $x_0 = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$

iii) D'après i), si $\overrightarrow{x}$ est une solution de $(E)$, alors $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0 = k\overrightarrow{u}$ et donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_0 + k\overrightarrow{u}$. Par conséquent l'ensemble des solutions de $(E)$ est

$$S = \{\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{V}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + k\overrightarrow{u}\ ,\ k \in \mathbb{R}\}$$

**Exercice 6:** a) Montrer que la distance $d$ d'un point $P$ de l'espace à une la droite $D\left(A,\overrightarrow{V}\right)$ est donnée par $d=\frac{\left|\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{AP}\right|}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}$ . L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, appliquer à $P(2,1,3)$ , $A(-1,1,-1)$ et $\overrightarrow{V}(-2,2,5)$.

b) Soit $\theta$ l'angle de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ . Montrer que $tg\theta=\frac{\left|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\right|}{\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}}$.

**Rep.** a) Soit $H$ la projection orthogonal de $A$ sur la droite $D\left(A,\overrightarrow{V}\right)$. On a

$$d=PH=PA|sin\theta|=PA\frac{\|\overrightarrow{V}\|}{\|\overrightarrow{V}\|}|sin\theta|=\frac{\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V}\|}{|sin\theta|}$$

b) On a $|sin\theta|=\frac{\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\|}{\|\overrightarrow{U}\|\|\overrightarrow{V}\|}$ et $|cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}|}{\|\overrightarrow{U}\|\|\overrightarrow{V}\|}$. Par conséquent: $|tg\theta|=\frac{\|\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}\|}{|\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}|}$

**Exercice 7:** Soit $D$ la droite passant par les deux points $A(1,1,0)$ et $B(1,0,1)$ , et soit $D'$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{V}(-1,1,0)$ et passant par le point $C(0,1,0)$. Déterminer la perpendiculaire commune à $D$ et $D'$ et la distance de ces deux droites.

**Rep.** Le vecteur directeur de la perpendiculaire commune à $D$ et $D'$ est orthogonal à leurs vecteurs directeurs. Il est donc colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{V}=(-1,-1,-1)$. On choisira $\overrightarrow{u}(1,1,1)$ comme vecteur directeur de cette perpendiculaire commune qu'on note $\Delta$, on a

$$\Delta=P(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB})\cap P(C,\overrightarrow{u},\overrightarrow{V})$$

Ecrivons les équations cartésiènnes de ces deux plans:
$P(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}):0=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=2x-y-z-1$ et $P(C,\overrightarrow{u},\overrightarrow{V}):0=\begin{vmatrix} x & y-1 & z\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=x-y+2z+1$

D'où les équation de $\Delta$ : $\begin{cases} 2x-y-z-1 &= 0\\ 2x-y-z-1 &= 0\end{cases}$

Si $H$ et $H'$ sont les intersections respectives de $\Delta$ avec les plans $\Delta=P(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB})$ et $P(C,\overrightarrow{u},\overrightarrow{V})$, la distance entre $D$ et $D'$ est égale à $HH'$. On peut calculer cette distance en déterminant les coordonnées de $H$ et de $H'$. Mais on peut aussi remarquer que $HH'$ est égale à la distance de n'importe quel point de $D$ au plan $P(C,\overrightarrow{V},\overrightarrow{AB})$ parallèle à $D$ et contenant $D'=D(C,\overrightarrow{V})$. Le calcul de l'équation de $P(C,\overrightarrow{V},\overrightarrow{AB})$ donne $x+y+z+1=0$. D'où:

$$HH'=d(A,P(C,\overrightarrow{V},\overrightarrow{AB}))=\frac{1+1+1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

**Exercice 8:** Soit la famille de plans $\mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{U}(1,1,1)$ et $\overrightarrow{V}(1,0,1)$, et le famille de plans $\mathcal{P}'$ de direction $\overrightarrow{U'}(-1,0,1)$ et $\overrightarrow{V'}(0,1,1)$.

Donner un vecteur normal à la famille $\mathcal{P}$ et un vecteur normal à la famille $\mathcal{P}'$ .

Montrer que tout plan de $\mathcal{P}$ est orthogonal à tout plan de $\mathcal{P}'$.

**Rep.** Un vecteur normal à la famille des plans $P(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$ est $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}=(1,0,-1)$. Un vecteur normal à la famille des plans $P(\overrightarrow{U'},\overrightarrow{V'})$ est $\overrightarrow{U'}\wedge\overrightarrow{V'}=(1,-1,1)$. Puisque $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{U'}\wedge\overrightarrow{V'}$ sont orthogonaux, on déduit que tout plan de $P(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$ est orthogonal à tout plan de $P(\overrightarrow{U'},\overrightarrow{V'})$

**Exercice 9:** a) Ecrire l'équation cartésienne du plan $(P_1)$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{U}(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{V}(0,1,-1)$ passant par le point $A(1,00)$ . Donner un vecteur normal $\overrightarrow{N}$ à ce plan.

b) Donner les composantes d'un vecteur normal à un plan engendré par $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W}(a,b,c)$. Donner une condition sur $a,b,c$ pour que ce plan soit orthogonal à $(P_1)$ .

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que les plans $(P_2)$ engendré par $\overrightarrow{U},\overrightarrow{N}$ et $(P_3)$ engendré par $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{R}(1,1,0)$ et passant tous les deux par le point $B(0,0,1)$ sont orthogonaux à $(P_1)$. Vérifier que $(P_2)$ et $(P_3)$ sont orthogonaux.

d) Donner un vecteur directeur de la droite $(D) = (P_1) \cap (P_2)$ , ainsi que son équation vectorielle .

e) Vérifier que les trois plans $(P_1)$ , $(P_2)$ et $(P_3)$ passent par un même point et donner un nouveau repère orthonormé $\left(B, \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ tel que $\overrightarrow{k'}$ colinéaire à $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{i'}$ colinéaire à $\overrightarrow{U}$.

f) Ecrire les équations des plans $(P_1)$ , $(P_2)$ et $(P_3)$ dans ce nouveau repère.

**Rep.** a) L'équation cartésiènne de $P_1(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est donnée par le produit mixte $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) = 0$. En écrivant $M(x, y, z)$, on obtient $P_1 :\ x + y + z - 1 = 0$. Un vecteur normal est donc $\overrightarrow{N}(1, 1, 1)$.

b) Un vecteur normal au plan engendré par $\overrightarrow{U}(1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{W}(a, b, c)$ est $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}(-c, -c, a + b)$. Ce plan est orthogonal à $P_1$ si et seulement si $\overrightarrow{N}.(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W}) = 0$, c'est à dire $a + b - 2c = 0$.

c) On utilise la condition trouvée en $b)$ avec $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{N}$, c'est à dire $a = b = c = 1$, et on vérifie que la condition $a + b - 2c = 0$ est satisfaite. Donc $P_2 = P(B, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est orthogonal à $P_1$.
Le cas du plan $P_3 = P(B, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{R})$ est évident car $\overrightarrow{N}$ est normal à $P_1$(donc $P_3$ est orthogonal à $P_1$). Vérifions le quand même en utilisant la formule $d)$ de l'exercice 3. Répétons le, $P_1$ et $P_3$ sont orthogonaux si et seulement si leurs normal le sont, c'est a dire $(\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{R}).(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) = 0$. Ce qui est bien vérifié grace à la formule

$$(\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{R}).(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) = (\overrightarrow{N}.\overrightarrow{U})(\overrightarrow{R}.\overrightarrow{V}) - (\overrightarrow{N}.\overrightarrow{V})(\overrightarrow{R}.\overrightarrow{U})$$

puisque $\overrightarrow{N}.\overrightarrow{U} = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{V} = 0$.
la même formule permet de montrer que $P_2$ et $P_3$ sont orthogonaux.

$$(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{N}).(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{R}) = (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{N})(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{R}) - (\overrightarrow{U}.\overrightarrow{R})(\overrightarrow{N}.\overrightarrow{N}) = -\|\overrightarrow{N}\|\overrightarrow{U}.\overrightarrow{R} = 0$$

car $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{R} = 0$.

d) Soit $I$ un point quelconque de $D = P_1 \cap P_2$ est $\overrightarrow{IE}$ le représentant de $\overrightarrow{U}$ en $I$. Le vecteur lié $\overrightarrow{IE}$ est contenu dans $P_1 \cap P_2$ car $\overrightarrow{IE}$ est équipollent à $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{U}$ est l'un des deux vecteurs qui engendrent $P_1$ et $P_2$. Par conséquent $U$ est un vecteur directeur de $(D)$. Comme on peut le vérifeir aisement le point $B \in P_1 \cap P_2$. Donc l'équation vectoriel de $(D)$ est

$$M(x, y, z) \in (D) \iff \overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{U}$$

e) Les trois plans $P_1, P-2$ et $P_3$ passent tous par le point $B(0, 0, 1)$. On choisit $\overrightarrow{k}' = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$, $\overrightarrow{i}' = \frac{\overrightarrow{U}}{\|\overrightarrow{U}\|}$ et $\overrightarrow{j}' = \overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{i}'$. Le repère de sommet $B$ est donc $\overrightarrow{i}'(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $\overrightarrow{j}'(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$; $\overrightarrow{k}'(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

f) Soit $(x, y, z)$ les coordonnées d'un point $M$ de l'espace dans le repère initial $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(x', y', z')$ ses coordonnées dans le repère $(B, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}')$. On a $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}' + z'\overrightarrow{k}'$ et comme $\overrightarrow{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j}' = \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{j} - \frac{\sqrt{6}}{3}\overrightarrow{k}$ et $k' = \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{k}$ , on déduit que

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} &= x'(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{j}) + y'(frac\sqrt{6}6\overrightarrow{i} + \tfrac{\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{j} - \tfrac{\sqrt{6}}{3}\overrightarrow{k}) + z'(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{i} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{k}) \\ &= (\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{6}}{6}y' + \tfrac{\sqrt{3}}{3}z')\overrightarrow{i} + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{6}}{6}y' + \tfrac{\sqrt{3}}{3}z')\overrightarrow{j} + (1 - \tfrac{\sqrt{6}}{6}y' + \tfrac{\sqrt{3}}{3}z')\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Il en résulte les expression des anciènnes coordonnées en fonction des nouvelles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z' \\ y &=& -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z' \\ z &=& 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z' \end{array} \right.$$

L'équation du plan $x + y + z - 1 = 0$ devient en remplaçant $z' = 0$.
On procède de même pour $P_2$, et $P_3$ après avoir ecrit leurs equations cartésiènnes dans l'ancien repère. Une autre méthode consiste à écrire les composantes des vecteurs directeurs des plans ainsi que celles des points $A, B$ dans le nouveau repère et exprimer les équations comme d'habitude.

**Exercice 10:** On considère les points de l'espace rapporté à un repère orthonormé $A(1, 1, 1)\,; B(1, -1, 1)\,; C(0, 1, -1)\,; D(-1, 0, -3)$ .

a) Montrer qu'ils sont coplanaires et donner l'équation cartésienne du plan $(P)$ qui les contient.

b) Donner les coordonnées de leur isobaricentre $G$.

c) On définit l'application à valeurs vectorielles $f$ qui fait correspondre à tout point $M$ de l'espace le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ défini par

$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{AB}$

i) Montrer que $\overrightarrow{f(M)}$ est constante, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(G)}$ pour tout point $M$.

ii) Vérifier que $\overrightarrow{f(A)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ et conclure que $\overrightarrow{f(M)}$ est orthogonal au plan $(P)$

**Rep.**

a) Les quatres points sont coplanaire, les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont aussi coplanaires. On a:
$\overrightarrow{AB}(0,-2,0), \overrightarrow{AC}(-1,0,-2)$ et $\overrightarrow{AD}(-2,-1,-4)$ et $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -8+8 = 0.$

L'equation du plan est $\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4x - 2z - 2 = 0.$ Ou encore $2x - y - 1 = 0$

b) Les coordonnées de $G$ sont $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{2}$

c) i)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(M)} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \wedge \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \wedge \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \wedge \overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{f(G)} \\
&= f(G)
\end{aligned}$$

ii) Calculons $\overrightarrow{f(A)}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(A)} &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DA} \\
&= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

De sorte que $\overrightarrow{f(A)}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = 0.$
On voit aussi que $\overrightarrow{f(A)}.\overrightarrow{DB} = 0$. Donc $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(A)}$ est normal au plan engendré par $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ qui est le plan $(P)$.

**Exercice 11:** Soit $A, B, C, D$ des points de l'espace et $G$ leur isobarycentre.

1) Déterminer l'ensemble $E_1$ des points $M$ de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}). \right\| = 3 \left\| \overrightarrow{MD} \right\|$

2) Soit $I$ le milieu de $GD$ et $k$ un réel. Montrer que $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MD} = MI^2 - IG^2$. déterminer le lieu des points $M$ tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MD} = 3k$

**Rep.**

1) On a $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{BC}$. Ainsi
$M \in E_1 \iff \|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{MD}\|$. Soit $D'$ tel que $\overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{BC}$, on aura
$M \in E_1 \iff \|\overrightarrow{MD'}\| = \|\overrightarrow{MD}\|$, $E_1$ est le plan médiateur de $DD'$, c'est à dire le plan orthogonal à la droite $(DD')$ passant par le milieu du segment $DD'$.

2) On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MG}.MD &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) \\
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IG}) \\
&= \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IG}\|^2
\end{aligned}$$

Comme $G$ est l'isobarycentre de $A, B, C$, on a $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MD}$ et par suite

$$\begin{aligned}
M \in E_2 &\iff 3MG.MD = 2k \\
&\iff \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IG}\|^2 = k \\
&\iff \|\overrightarrow{MI}\|^2 = \|\overrightarrow{IG}\|^2 + k
\end{aligned}$$

Si $k < -\|\overrightarrow{IG}\|^2$, $E_2 = \emptyset$

Si $k = -\|\overrightarrow{IG}\|^2$, $E_2 = \{I\}$,

Si $k > -\|\overrightarrow{IG}\|^2$, $E_2$ est la sphere de centre $I$ et de rayon $\sqrt{k + \|\overrightarrow{IG}\|^2}$.

**Exercice 12:** Soit $A$ et $B$ deux points distincts fixés de l'espace. On définit l'application ponctuelle $f$ qui fait correspondre à tout point $M$ de l'espace le point $M' = f(M)$ défini par $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ .

a) Montrer que l'image par $f$ d'une droite $D$ passant par un point $C$ et de vecteur directeur non nul $\overrightarrow{u}$ est une droite $\Delta$ dont on précisera un point et un vecteur directeur. Vérifier que $D$ et $\Delta$ sont orthogonales.

b) Pour tout point $M$ déterminer $f \circ f(M)$ et $f \circ f \circ f(M)$ .

**Rep.** a) Soit $M$ un point de la droite $D(C, \overrightarrow{u})$ et notons $M' = f(M)$ et $C' = f(C)$. On a

$$\overrightarrow{C'M'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM}$$

et $M \in D(C, \overrightarrow{u})$ entraine l'existence de $\alpha$ tel que $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{u}$. D'où $\overrightarrow{C'M'} = \alpha\overrightarrow{u'}$ avec $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}$. Par conséquent, l'image de $D(C, \overrightarrow{u})$ et la droite $D(C', \overrightarrow{u'})$.

Comme $u$et $u'$ sont orthogonaux, on déduit que les droites $D(C, \overrightarrow{u})$ et $D(C', \overrightarrow{u'})$ sont perpendiculaires

b) Soit $M' = f(M)$ et $M" = f(M')$, on a $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ et

$$\overrightarrow{AM"} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}).$$

$M"$ est dans le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$. Le vecteur $\overrightarrow{AM"}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et sa norme est $\|\overrightarrow{AM"}\| = \|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AM}\||sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})|$.

En définitive, le point $M" = f \circ f(M)$ est sur le plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, de plus $\overrightarrow{AM"}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\|\overrightarrow{AM"}\| = \|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AM}\||sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})|$.

De même pour $M^{(3)} = f(M")$, on a $AM^{(3)} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}"$ et le point $M^{(3)}$ est sur la normal au plan $P(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et tel que $\|\overrightarrow{AM^{(3)}}\| = \|\overrightarrow{AB}\|^2\|\overrightarrow{AM}\||sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})|$.

**Exercice 13:** Soit $\Omega$ un point du plan affine $\mathcal{P}$, k un réel strictement positif et $f$ l'application de $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ dans $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ définie par

$m \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \longrightarrow f(m) = M$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega m}\|^2}\overrightarrow{\Omega m}$ .

1) Etablir que $f$ est une application involutive , c'est à dire $f \circ f = f$

2) Quel est l'ensemble des points invariants par $f$ ? Montrer que $f$ partage $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ en trois regions $A_1, A_2, A_3$ telles que $f(A_1) = A_1$ , $, f(A_2) = A_3$ et $, f(A_3) = A_2$.

3) On considère $\mathcal{P}$ comme le plan complexe et on désigne par $\alpha, z, Z$ les affixes respectives de $\Omega, m, M$ . Montrer que

$M = f(m) \iff Z = \alpha + \frac{k}{z-\alpha}$ . On pose $f(z) = \alpha + \frac{k}{z-\alpha}$ , retrouver les resultas de 1) et de 2).

**Rep.**

1) Montrons que $f$ est involutive (c'est à dire $f \circ f(M) = M$). Soit $M' = f(M)$ et $M" = f(M')$. On a $\overrightarrow{\Omega M"} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M'}\|^2}\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$. Ce qui donne

$$\overrightarrow{\Omega M"} = \frac{k}{k^2}\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$$

On a bien $f \circ f(M) = M$.

2) Un point $M$ est invariant par $f$ si $f(M) = M$, ce qui est équivalent à $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$, ou encore $\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = k$. L'ensemble des points invariants par $f$ est donc le cercle $C(\Omega, \sqrt{k})$ de centre $\Omega$ et de rayon $\sqrt{k}$. Soit

$A_1 = C(\Omega, \sqrt{k}) = \{M \in P\ : \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = k\}$

$A_2 = \{M \in P \, : \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 < k\}$
$A_3 = \{M \in P \, : \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 > k\}$
Déterminons $f(A_2)$. Pour $M \in A_2$ et $M' = f(M)$, on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2}\overrightarrow{\Omega M} > k$. Donc $f(M) \in A_3$ et on a $f(A_2) \subset A_3$. Comme $f$ est involutive on déduit que $A_2 = f \circ f(A_2) \subset f(A_3)$. On montre de même que $f(A_3) \subset A_2$ et $A_3 = f \circ f(A_3) \subset f(A_2)$. Finalement

$$f(A_1) = A_1 \quad f(A_2) = A_3 \quad f(A_3) = A_2.$$

3) On a $M = f(m) \iff \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega m}\|^2}\overrightarrow{\Omega m}$. Dans le plan complexe cela s'ecrit $Z - \alpha = \frac{k}{(z-\alpha)\overline{(z-\alpha)}}(z - \alpha)$, soit $Z = \alpha + \frac{k}{\overline{z-\alpha}}$.
Posons $Z = f(z)$, on a $f^2(z) = f(Z) = \alpha + \frac{k}{\overline{Z-\alpha}}$. Comme $\overline{Z - \alpha} = \frac{k}{z-\alpha}$, on a $f^2(z) = \alpha + z - \alpha = z$.

$$\begin{aligned} f(z) = z \quad & \iff \quad \alpha + \frac{k}{\overline{z-\alpha}} = z \\ & \iff \quad z - \alpha = \frac{k}{\overline{z-\alpha}} \\ & \iff \quad |z - \alpha|^2 = k \\ & \iff \quad z \in C(\Omega, \sqrt{k}) \end{aligned}$$

Les autres assertions s'obtiennent de la même manière.

CHAPTER 3

# Fonctions vectorielles

**Exercice 1.** Donner la nature des courbes suivantes
$2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1=0$
$2x^2-4xy+2y^2-3x+3y+1=0$
$4x^2+12xy+9y^2-2x+1=0$
$(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$
$(x+y+1)(x-y+3)=3$

**Exercice 2** Montrer que pour qu'un vecteur dérivable $\overrightarrow{V}(t)$ garde un module constant, il faut et il suffit que $\overrightarrow{V}(t) et\ \overrightarrow{V'}(t)$ soient orthogonaux. Pour qu'un vecteur dérivable $\overrightarrow{V}(t)$garde une direction invariante, il faut et il suffit que $\overrightarrow{V}(t)$ et $\overrightarrow{V'}(t)$ soient colinéaires.

**Rep.** Soit $\overrightarrow{V}(t)$ un vecteur dérivable de module constant $\|\overrightarrow{V}(t)\|=c$. On aura $\overrightarrow{V}(t).\overrightarrow{V}(t)=\|\overrightarrow{V}(t)\|^2=c^2$, ce qui entraine que $(\overrightarrow{V}(t).\overrightarrow{V}(t))'=0$ et donc que $2(\overrightarrow{V}(t))'.\overrightarrow{V}(t)=0$. Finalement $\overrightarrow{V}(t) et\ \overrightarrow{V'}(t)$ soient orthogonaux. La réciproque s'obtient de la même manière.

Pour la réciproque, remarquons que $\overrightarrow{V}(t)$ que garde une direction constante si et seulement si le vecteur $\frac{\overrightarrow{V}(t)}{\|\overrightarrow{V}(t)\|}$ est constant, ce qui équivaut à $(\frac{\overrightarrow{V}(t)}{\|\overrightarrow{V}(t)\|})'=0$. On calcule cette dérivée, $\frac{(\overrightarrow{V}(t))'\|\overrightarrow{V}(t)\|-\overrightarrow{V}(t)2\frac{(\overrightarrow{V}(t)).(\overrightarrow{V}(t))'}{\|\overrightarrow{V}(t)\|}}{\|\overrightarrow{V}(t)\|}$ qu'est nul lorsqu'on suppose que $\overrightarrow{V}(t))'$ et $\overrightarrow{V}(t)$ sont colinéaires $\alpha(t)(\overrightarrow{V}(t))'=\overrightarrow{V}(t)$.

**Exercice 3**

Dans l'espace affine $E_3$ rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, soit $P$ le plan d'équation $x-2y-3z=0$ . On se donne le vecteur $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ et on définit l'application $p:E_3\longrightarrow P$ par $p(M)=M'$ tel que $\overrightarrow{MM'}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ .

1) Donner une interprétation géométrique de $p$ .

2) Donner une représentation paramétrique de $C'=p(C)$ , où $C$ est l'ensemble des points $M$ de $E_3$ de coordonnées $x=t$ , $y=t^2$, $z=t^3$ . Soit $D$ la tangente à $C$ au point $A$ correspondant à $t=1$ . Vérifier que $p(D)$ est la tangente à $C'$ au point correspendant à $t=1$.

**Rep.** 1) On a $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan $P$ et $\overrightarrow{MM'}\wedge,\ \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ entraine que $\overrightarrow{MM'}$ est aussi orthogonal à $P$. Puis que en plus $M'\in P$, on déduit que c'est la projection orthogonal de $M$ sur $P$.

2) Soit $M(t,t^2,t^3)\in C$ et $M'(x,y,z)$ son image, il existe $\lambda$ réel tel que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{\lambda}u$. Ce qui donne $x-t=-\lambda, y-t^2=2\lambda$ et $z-t^3=3\lambda$ et par suite $x=t-\lambda, y=t^2+2\lambda$ et $z=t^3+3\lambda$. Du fait que $M'\in P$, on tire que $t-2t^2-3t^3=14\lambda$

**Exercice 4**

Montrer que la torsion $\tau(t)$ en un point d'une courbe définie par une fonction vectorielle $F(t)$ est donnée par la formule
$\tau(t)=-\frac{\left(F'(t),F''(t),F'''(t)\right)}{\left\|F'(t)\wedge F"(t)\right\|^2}$. On peut procèder comme suit :

i) Calculer $F'''(t)$ . ii) Montrer que $\overrightarrow{N'(t)}.\overrightarrow{T(t)}+v(t)c(t)=0$ et $\overrightarrow{N'(t)}.\overrightarrow{B(t)}+\tau v(t)=0$ , où $v(t)=\|F'(t)\|$

iii) Calculer $\overrightarrow{N'(t)}$ et déduire la formule du calcul,du produit mixte

$(F'(t), F''(t), F'''(t))$.

**Exercice 5**

Déterminer la courbure, le rayon de courbure, le centre de courbure et la tortion en un point queconque $M$ de chacune des courbes suivantes

$F(t) = \left(3t^2, t^3 - 3t, t^3 + 3t\right)$. Application à $t = 1$ .

$G(t) = \left(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta, a\cos 2\theta\right)$

**Exercice 6** Soit la portion de courbe $(C)$ $y = \sqrt{x}$ , $0 \leq x \leq 4$. Déterminer l'équation de la surface de révolution obtenue par rotation de $(C)$ autour de la droite d'équations $y = 3$, $z = 0$. (On peut effectuer le changement de variable $u = y - 3$ ) .

**Exercice 7**

Soit $(S)$ la surface d'équation $x\sin\frac{z}{a} - y\cos\frac{z}{a} = 0$. Donner une représentation paramétrique de $(S)$ . Trouver le lieu des points de $(S)$ en lesquels le plan tangent passe par un point donné $A(a, o, o)$.

**Exercice 8**

Soit la courbe $(C)$ dont une représentation paramétrique est $x = \cos^3 t$ , $y = \sin^3 t$ , $z = \cos 2t$

1) Déterminer la surface engendrée par cette courbe en tournant autour de l'axe $Oz$.

2) Calculer la courbure et le rayon de courbure en un point de $(C)$ pour lequel $t \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3) Determiner les coordonnées du centre de courbure en un tel point ainsi que le trièdre de Frenet en ce point.

4) Quel est le lieu du centre de courbure lorsque $(C)$ tourne autour de $Oz$ ?

**Exercice 9**

Soit $(S)$ la surface de représentation paramétrique

$x(u,v) = 1 + u\cos v$ , $y(u,v) = 1 + u\sin v$ , $z(u,v) = u^2\cos 2v$.

1) Vérifier que les points $(1,1,0)$ et $(0,0,0)$ appartiennent à $(S)$.

2) Calculer $(x-1)^2 - (y-1)^2$ pour donner l'équation cartésienne de $(S)$. Nature de $(S)$.

3) Donner l'équation du plan tangent à $(S)$ en un point $(x_0, y_0, z_0)$ de $(S)$.

4) Déterminer le lieu des points $M(x_0, y_0, z_0)$ de $(S)$ tels que le plan tangent en $M(x_0, y_0, z_0)$ passe par l'origine.

5)Vérifier que ce lieu est une courbe plane $(C)$ qui est l'intersection de $(S)$ avec le plan $(P)$ d'équation $2x_0 + 2y_0 + 2z_0 = 0$

6) Quel est le plan osculateur à $(C)$ en l'un quelconque de ses points?

7) Donner une représentation paramétrique de $(C)$ . (On pourra la déduire de celle de $(S)$ à l'aide de l'équation de $(P)$ ). Identifier $(C)$.

**Exercice 10**

Soit $a > 0$. 1) Montrer q'un plan contient la droite $(D_1)$ :

$z = 2a$ , $y = 0$ si et seulement s'il existe tel que son équation cartésienne se mette sous la forme $y = \alpha(z - 2a)$. Montrer de même q'un plan contient la droite $(D_2)$ : $z = -2a$, $x = 0$ si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que son équation cartésienne se mette sous la forme $x = \beta(z + 2a)$.

2) Donner l'équation cartésienne de la droite $(\Delta_{\alpha,\beta})$ intersection d'un plan passant par $(D_1)$ et d'un plan passant par $(D_2)$. Vérifier que les points de coordonnées $(0, -4a\alpha, -2a)$ et $(4a\beta, 0, 2a)$ appartiennent à $(\Delta_{\alpha,\beta})$ et donner les équations paramétriques de $(\Delta_{\alpha,\beta})$ .

3) Donner l'équation de la surface $(S)$ engendrée par la droite s'appuyant sur les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ et sur le cercle $z = 0$ , $x^2 + y^2 = a^2$.

4) Quelle est la nature des sections de $(S)$ par les plans $z = h$, $h \in \mathbb{R}$

**Exercice 11**

1)Vérifier que la courbe $(C)$ : $x = 2t$ , $y = 2t^2$ , $z = 2t^3$ , est sur la surface $(\Sigma)$ d'équations paramétriques

$x = u + v$ , $y = u^2 + v^2$ , $z = u^3 + v^3$.

2) Montrer que $(C) = \{M(u,v) \in (\Sigma) \ , \ u = v\}$
$= \left\{M(u,v) \ \in \ (\Sigma) \ , \ \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \ et \ \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \ sontcolinéaires\right\}$ .

3) Donner un vecteur normal au plan osculateur de $(C)$ en un point courant $M(t)$ , équation cartésienne de ce plan. Quel est ce plan pour $t = 0$ et $t = 1$ ? Déterminer les paramètres $u$ et $v$ corrependants à $t = 0$ et à $t = 1$.

4) Donner l'équation du plan tangent à $(\Sigma)$ en un point $M(u)$ en lequel $v = -u$ , $u \neq 0$ Vérifier que tous ces plans contiennent l'axe $Oy$.

**Exercice 12**

Soit $\varphi(x,y)$ une fonction de classe $C^2$ définie dans un domaine $D$ de $\mathbb{R}^2$. On pose $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$ , $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$. Soit la surface $(S)$ d'équation $z = \varphi(x,y)$, $M = M(x,y)$ le point de $(S)$ de coordonnées $(x,y,z)$ et $P = P(x,y)$ la projection orthogonale de l'origine $O$ sur le plan tangent à $(S)$ en $M$. On note $(\Sigma)$ l'ensemble des points $P$ lorsque $M$ décrit $(S)$.

1) Donner l'équation du plan tangent à $(S)$ en un point $M(x,y)$.

2) Calculer les coordonnées $X, Y, Z$ de $P$ en fonction de $x, y, z, p, q$.

3) Montrer que $(\Sigma)$ admet une représentation paramétrique définie par la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}(x,y) = f(x,y)\left[p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right]$ , les paramètres $x, y$ variant dans le domaine $D$ et $f(x,y)$ une fonction à déterminer.

4) On suppose que $(S)$ est le paraboloide hyperbolique d'équation $z = \varphi(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2}$. Exprimer dans ce cas $X, Y$ et $Z$ puis montrer que $(\Sigma)$ a pour équation cartésienne $2Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + X^2 - Y^2 = 0$ . Montrer que si $(\Sigma)$ admet au point $P$ un plan tangent, la normale à $(\Sigma)$ en ce point est la droite $(PI)$ où $I$ est le milieu du segment $OM$.

*Examen* 2005/2006

Université Mohammed V-Agdal — Semestre 1 ; 2005 -2006
Faculté des sciences Mathématiques — SM - SMI
Contrôle final de Calcul Vectoriel — Durée : 1 H 30mn

Exercice 1 Donner la forme canonique de la conique suivante, puis la reconnaître :
$\mathbf{3x^2+y^2+2\sqrt{3}xy+7x+\sqrt{3}y+2=0}$

On rappelle les formules de changement de coordonnées par rotation d'angle $\theta$ qui lient les anciennes coordonnées $(x,y)$ aux nouvelles $(X,Y)$ :
$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$ , $y = X\sin\theta + Y\cos\theta$
$X = x\cos\theta + y\sin\theta$ , $Y = -x\sin\theta + y\cos\theta$

Exercice 2 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit les trois points de l'espace $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$; $C(0,0,1)$ et $G$ le barycentre du système $\{A(1), B(1), C(2)\}$.

1) Déterminer les coordonnées de $G$ et montrer qu'il est dans le plan défini par les points $A, B, C$.

2) Soit $a$ un réel non nul et le point $K$ tel que $\overrightarrow{OK} = a\overrightarrow{OG}$

i) Donner en fonction de $a$ , les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $(\mathcal{P}_1)$ déterminé par les points $A, C, K$ , et celles d'un vecteur $\overrightarrow{n_2}$ normal au plan $(\mathcal{P}_2)$déterminé par les points $B, C, K$.

ii) Déduire la condition sur $a$ pour que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ soient orthogonaux . Déterminer $a$ pour qu'il en soit ainsi.

Exercice 3 Soit $(\mathcal{S})$ la surface de représentation paramétrique
$x = u\cos v$; $y = u\sin v$; $z = \frac{1}{2}u^2\cos 2v$

1) Calculer $x^2 - y^2$ et donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{S})$.

2) Donner un vecteur normal à $(\mathcal{S})$ en un point quelconque $M(x_0, y_0, z_0)$ de $(\mathcal{S})$. Donner l'équation cartésienne du plan tangent à $(\mathcal{S})$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$.

3) Montrer que l'ensemble des points $M(x_0, y_0, z_0)$de $(\mathcal{S})$ en lesquels le plan tangent passe par le point $A(1,1,1)$ est l'intersection de $(\mathcal{S})$ et du plan d'équation $x_0 + y_0 - z_0 - 1 = 0$.

4) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ d'équations paramétriques
$x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = \frac{1}{2}\cos 2t$
est contenue dans $(\mathcal{S})$