I Introduction

I.1 Mécanique

La mécanique, qui est la science des mouvements, se divise en quatre grands chapitres qui sont : la dynamique, la statique, la cinématique et la cinétique. La dynamique établit le lien entre les mouvements des corps et les actions mécaniques qui s'exercent sur eux. La statique est un cas particulier de la dynamique, puisqu'elle étudie les conditions nécessaires pour que les corps restent en équilibre. Enfin, la cinématique et la cinétique étudient le mouvement des corps sans faire intervenir les actions qui les ont mis en mouvement.

I.2 Principes de Newton

Il est intéressant de connaître les lois de la mécanique générale énoncées par I. Newton (1687), afin de situer le cadre de la statique. Ces lois, qui s'énoncent sous forme de trois principes, postulent la forme des relations entre mouvements et actions mécaniques.

1) Premier principe

Tout corps demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, par rapport à un référentiel Galiléen[1] , sauf si des forces le contraignent d'en changer.

Remarque : Ce principe énonce le principe de l'équilibre des forces qui constitue l'objet essentiel de la statique. Du point de vue de la dynamique, la notion d'équilibre est plus générale que celle qui nous

[1] Un référentiel est Galiléen lorsqu'il ne subit aucune accélération. Il peut avoir un mouvement rectiligne et uniforme.

intéresse ici. On écarte, du cours de cette année, les mouvements de translation uniforme pour ne s'intéresser qu'à des systèmes immobiles.

2) Deuxième principe

Par rapport à un référentiel Galiléen, le mouvement d'un point matériel A de masse m soumis à plusieurs forces, satisfait à la relation

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma} \qquad \text{I.1}$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération.

Autrement dit, toute force non compensée, agissant sur un corps est proportionnelle à la masse de ce corps et à son accélération.

Remarque : Le premier principe est un corollaire du second principe. En effet, ce principe montre bien, que lorsque la résultante des forces est nulle il n'y a pas d'accélération.

3) Troisième principe

Cette loi énonce le principe de l'opposition des actions réciproques qui dit que la réaction est toujours opposée à l'action. Les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales, parallèles et dirigées en sens contraire.

Remarque : Ce principe établit que les forces se présentent toujours en paire. Il est alors nécessaire, lorsqu'on fait l'analyse de l'équilibre d'un système, d'isoler clairement ce système afin de ne retenir que la force de la paire qui agit sur le système en question.

I.3 Statique

Comme nous l'avons dit précédemment, la statique est l'étude des conditions pour lesquelles les corps restent immobiles, relativement à un référentiel. Précisons quelque peu cette définition. En effet, on distingue deux catégories de corps matériels : les corps indéformables et les corps déformables. On entend, par corps indéformable, tout corps dont la forme géométrique reste invariante quelle que soit l'action qui s'y applique. Bien sûr, il n'existe pas dans la réalité de corps absolument indéformable. On peut cependant, dans nombreux cas, considérer que cette approximation est valable. Cela dépend de l'action qui s'exerce sur le corps en question, mais aussi de la durée de cette action. Par exemple, sous l'action de leur propre poids, les objets lourds qui semblent inertes sur des durées relativement brèves, révèlent des déformations importantes sur des échelles de temps plus longues. Ces effets sont donc à étudier avec beaucoup de précautions et cela notamment lors de la conception des édifices.

L'étude des conditions d'équilibre pour les corps déformables est le domaine de la Résistance Des Matériaux (RDM). Nous donnons, dans la seconde partie de ce document, quelques notions de base en guise d'introduction à la RDM. Cette dernière est étudiée en détail tout au long de la deuxième année. Pour ce qui nous concerne, la statique se limite à l'étude des conditions d'équilibre pour les corps indéformables.

II Conditions d'équilibre

Un corps indéformable est considéré comme étant immobile lorsqu'il est, à la fois, en équilibre de translation et en équilibre de rotation.

II.1 Équilibre de translation

Cette condition traduit l'absence de déplacement global du corps. Pour vérifier cette condition, il faut que la somme des forces extérieures soit nulle. Elle s'écrit, sous forme algébrique,

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \qquad \text{II.1}$$

II.2 Équilibre de rotation

Un corps ne se déplaçant pas, mais tournant autour de lui même, est considéré en mouvement. Pour être au repos complet, il faut éviter également les actions tendant à le faire tourner autour de lui même. L'équilibre de rotation assure ceci, et s'écrit, sous forme algébrique,

$$\Sigma \vec{M}_{\vec{F}/o} = \vec{0} \qquad \text{II.2}$$

o est un point quelconque appartenant au système étudié. On explique plus en détail, dans le chapitre suivant, la notion de force, et on introduit le moment d'une force.

III Forces

III.1 Définitions

Une force est l'action qui tend à changer l'état dynamique d'un système. Un corps soumis à une force subit une accélération ou une décélération.

III.1.1 Forces concourantes et non-concourantes.

Quand les supports des forces, agissant sur un corps en équilibre de translation, se coupent en un même point, celles-ci n'ont pas tendance à faire tourner le corps. De telles forces sont dites concourantes. Dans le cas contraire, les forces sont non-concourantes et provoquent la rotation du corps.

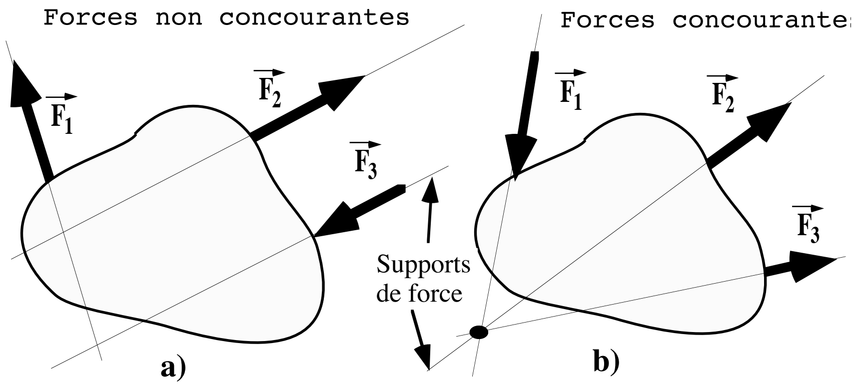


Figure III.1 a) Système de forces non-concourantes. Dans ce cas, les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont concourantes, par contre $\vec{F}_3$ ne l'est pas. Elle a tendance à faire tourner l'objet. **b)** Toutes les forces sont concourantes.

III.2 Forces concentrées et forces réparties

III.2.1 Définitions

Une force est dite concentrée ou ponctuelle, lorsque la zone d'application de cette force peut se réduire à un point, autrement dit son extension spatiale est nulle. Dans le cas contraire, on dit que la force est répartie. Cette distinction est surtout utile pour l'étude de l'équilibre des corps déformables en RDM, car la détermination des contraintes internes nécessite la description détaillée des forces mises en jeu.

En ce qui concerne la physique du bâtiment, il n'existe pas réellement de forces ponctuelles. En effet, tous les objets usuels et toutes les structures mises en jeu dans une construction ont une extension spatiale non nulle. Ceci implique que les forces, mises en jeu, ont nécessairement une région d'application non nulle. Cependant, on peut dans certains cas, négliger cette extension spatiale et cela aussi bien du point de vue de la statique que celui de la RDM. Ce choix peut être dicté par différentes considérations.

Par exemple, lorsque l'on a deux objets en contact et que l'un des objets est de très petite taille par rapport à l'autre, on peut alors assimiler le contact sur l'objet de grande dimension comme étant ponctuel. On dit alors que l'objet de grande taille subit une force concentrée à l'endroit où se situe l'objet de petite taille.

La distinction peut également être dictée par la nature de l'étude que l'on désire accomplir. En effet, si l'on s'intéresse au problème de l'adhérence d'un véhicule, on peut, pour une même configuration, considérer que les forces de contact avec le sol, sont soit réparties, soit concentrées. Le schéma suivant illustre simplement le propos.

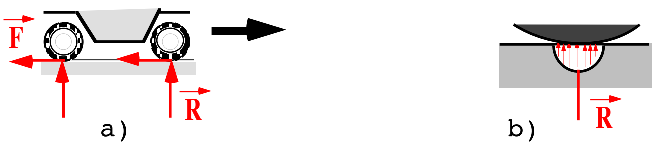


Figure III.2 Les réactions sur les roues dans le cas (a) sont dites concentrées. Dans le cas b), qui est un zoom sur la région de contact, ces forces sont dites réparties.

Supposons que, dans le cas représenté par la figure III.2-a), on étudie le comportement du véhicule dans son ensemble. C'est le cas, par exemple, des études de tenue de route. On peut, alors, assimiler les réactions au sol à des forces concentrées, s'appliquant en un point de chacune des roues. Si, maintenant, l'on désire étudier l'adhérence des roues ou leur usure avec le temps, il nous faut une analyse plus fine du contact. En regardant de plus près la zone de contact, on montre sa répartition spatiale. Dans ce cas, la réaction du sol sur la roue se répartit sur une surface plus ou moins importante suivant le niveau de gonflage des roues.

III.2.2 Forces réparties

On distingue trois types de répartition des forces, qui sont par ordre croissant de dimension d'espace : les répartitions linéiques, les répartitions surfaciques et enfin les répartitions volumiques.

a) Force linéique

Dans le cas des répartitions linéiques, les forces s'appliquent le long d'une ligne. C'est le cas, par exemple, d'un pont suspendu à un câble. Le câble est considéré comme une ligne du fait du grand rapport existant entre sa longueur et sa section. On utilise comme unité le Nm^{-1} définissant la force par unité de longueur.

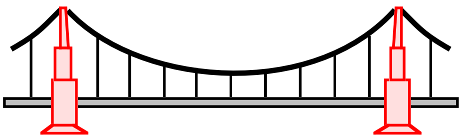


Figure III.3 Le câble flexible d'un pont suspendu peut être considéré comme un objet à une dimension le long de laquelle s'applique le poids de la chaussée.

b) Force surfacique

Pour les répartitions surfaciques, les forces se répartissent sur une surface. C'est le cas du vent qui souffle dans la voile d'un voilier, ou bien encore la pression de l'eau d'un fleuve sur un barrage hydraulique. Ces forces surfaciques ont la dimension d'une pression Nm^{-2} .

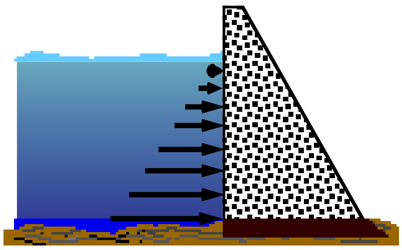


Figure III.4 Dans un barrage hydraulique, la pression de l'eau s'applique sur toute la surface du mur. Cette pression est proportionnelle à la profondeur.

c) Force volumique

Le troisième type de forces, est celui des forces volumiques qui se répartissent sur tout le volume du corps. C'est le cas de la force d'attraction gravitationnelle. Dans le cas de l'attraction terrestre, on parle plus communément du poids des corps. On étudie, plus en détail, cette force au chapitre V.

d) Force uniformément répartie

Pour les trois catégories citées précédemment, la répartition des forces peut être soit quelconque soit uniforme. Ces deux types de répartitions se retrouvent partout dans les édifices où le poids des structures supérieures s'exerce continuellement sur les structures les supportant.

On parle de charge uniformément répartie lorsque la charge se répartit avec la même intensité sur tout l'espace d'application. Dans le cas contraire, la répartition est quelconque. Lorsque la géométrie de la charge est trop compliquée, on peut la modéliser par une forme géométrique simple permettant d'obtenir rapidement une solution approchée. Afin de traiter les cas les plus fréquemment rencontrés, on considère le cas des poutres, que l'on retrouve dans tout type de structure. On consacre, dans la partie de RDM, un chapitre pour définir plus précisément les caractéristiques des poutres.

La plupart des poutres sont de longues barres dont la section transversale est petite par rapport à la longueur. Les charges présentées ici s'exercent perpendiculairement à l'axe de la poutre. Bien que l'on n'ait fait aucune hypothèse sur les dimensions de ces charges, on peut considérer que l'on est en présence de forces linéiques puisqu'elles s'appliquent uniquement à l'endroit de la poutre.

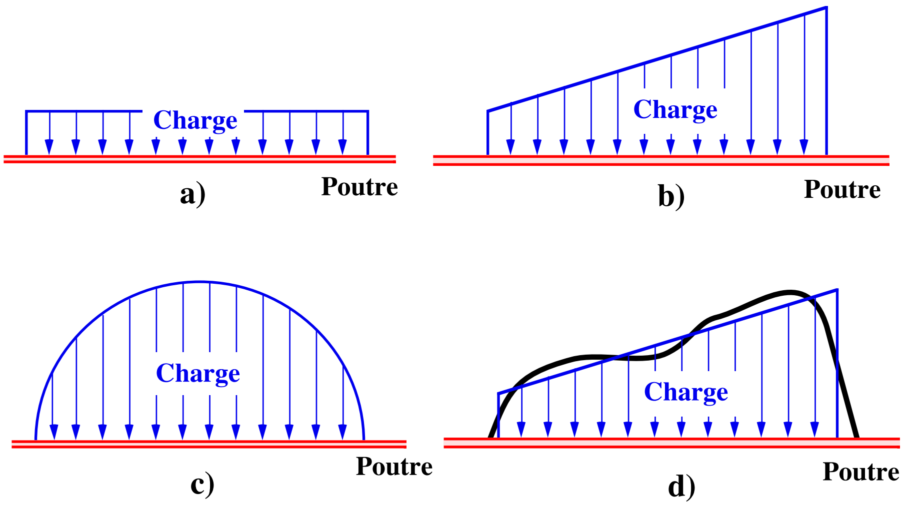


Figure III.5 On représente en a), b) et c) quelques formes usuelles. Pour le cas d) on a considéré une forme complètement quelconque pour la charge (trait en gras).

La géométrie des charges, que l'on peut rencontrer dans la réalité, est variée et possède souvent des formes compliquées. On peut cependant, à partir de formes simples, comme celles tracées sur la figure III.5.a), b) ou c), s'approcher de la forme originale. Dans le cas d) on a choisi une configuration quelconque que l'on a modélisée par la géométrie s'en approchant le plus possible.

Ces modèles sont d'un grand intérêt pour la détermination du centre de masse pour des objets de forme quelconque. En effet, la détermination de l'équilibre statique, nécessite la connaissance de la position du point d'application de la force résultante de ces charges réparties. On donne au chapitre IV la définition du centre de masse et son expression pour quelques formes usuelles.

III.3 Moment d'une force

III.3.1 Moment par rapport à un point

Le moment d'une force, par rapport à un point de référence, est le résultat du produit vectoriel (voir rappel) du vecteur joignant ce point de référence au point d'application de la force, avec le vecteur force.

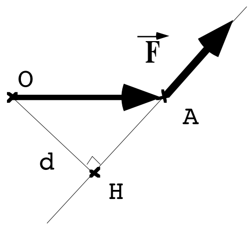


Figure III.6 Moment de $\vec{F}$ par rapport à O

Soit O le point de référence et A le point d'application de la force $\vec{F}$. Le moment de cette force par rapport à O est donné par

$$\vec{M}_{\vec{F}/o} = \vec{OA} \times \vec{F} \qquad \text{III.1}$$

Soit H la projection de O perpendiculairement au support de la force. On définit ainsi la distance, d, de O par rapport à cet axe. D'après la définition du produit vectoriel (voir rappel) l'expression III.1 devient,

$$\vec{M}_{\vec{F}/o} = \vec{OH} \times \vec{F} = d.F\,\vec{k}$$

d est le bras de levier de $\vec{F}$ par rapport à O. Le module du moment, est

$$M_{\vec{F}/o} = d.F$$

se réduit simplement au produit du bras de levier par le module de la force.

III.3.2 Moment par rapport à un axe

Le moment, par rapport à un axe, mesure la tendance d'une force, ou d'un système de forces, à faire tourner un objet autour d'un axe fixe. C'est le cas, par exemple, d'une porte pivotant sur ses gonds. Son expression est obtenue en faisant le produit scalaire du moment de la force, par rapport à un point quelconque de l'axe, avec un vecteur unitaire porté par cet axe. Soit, $\vec{i}$ ce vecteur unitaire, on a alors,

$$M_{\vec{F}/\Delta} = \vec{M}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{i} \qquad \text{III.2}$$

Reprenons l'exemple de la porte afin d'expliciter l'expression de ce moment.

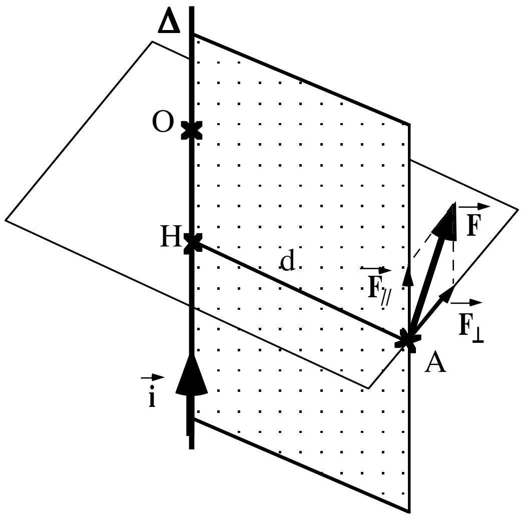


Figure III.7 La force appliquée à la porte est décomposée en une composante orthogonale à Δ et une composante parallèle à Δ.

La force, $\vec{F}$, est décomposée en sa composante parallèle à l'axe, $\vec{F}_{//}$, et sa composante orthogonale à l'axe $\vec{F}_{\perp}$. On développe alors l'expression III.2 de la façon suivante

$$M_{\vec{F}/\Delta} = \vec{M}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{i} = [\, \vec{OA} \times \vec{F} \,] \cdot \vec{i} = [\, (\vec{OH} + \vec{HA}) \times (\vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}) \,] \cdot \vec{i}$$

Le dernier terme se simplifie (laissé en exercice (voir rappel)), et le moment se réduit alors à

$M_{\vec{F}/\Delta} = [\,\overrightarrow{HA} \times \vec{F}_\perp] \,.\, \vec{i} = d.F_\perp$

Ce résultat montre que le moment par rapport à un axe est indépendant du point de référence O choisi sur cet axe (la démonstration est laissée en exercice). De plus, on voit que ce moment est indépendant de la position du point d'application sur une ligne parallèle à Δ. Il ne dépend que de la distance d à Δ. Cela signifie, dans le cas de la porte par exemple, que l'effet de l'action appliquée est le même selon qu'on la pousse au niveau de la poignée ou ailleurs.

III.3.3 Définition d'un couple

On appelle couple, tout système de forces, dont la somme est nulle mais dont le moment est non nul. Les couples servent à faire tourner les corps sans pour autant provoquer le déplacement de ces corps. Prenons, pour exemple, un système, formé de deux forces uniquement, s'exerçant sur un disque. L'une est l'opposée de l'autre, et leur point d'application est diamétralement opposé. On représente, sur la figure suivante, un schéma du système considéré.

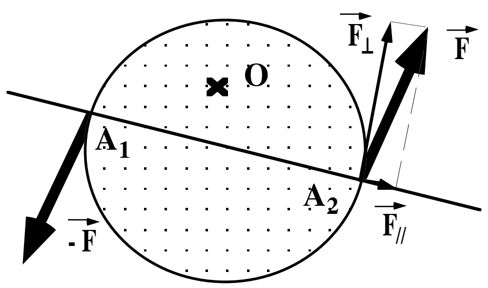


Figure III.8 Les deux forces forment un couple. Elles font tourner le disque sans provoquer de déplacement.

Désignons par $\vec{M}_O$ le moment global résultant de l'effet des deux forces par rapport à un point quelconque du disque O.

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{\vec{F}\,/o} + \vec{M}_{-\vec{F}\,/o} = -\vec{OA_1} X \vec{F} + \vec{OA_2} X \vec{F}$$

En mettant $\vec{F}$ en facteur et en remplaçant (- $\vec{OA_1}$) par ($\vec{A_1O}$), on obtient

$$\vec{M}_o = \vec{A_1A_2}\ X\, \vec{F} \qquad \text{III.3}$$

D'après la définition du produit vectoriel, l'expression du couple peut s'écrire

$$\vec{M}_o = dF_\perp \vec{k}$$

où d est la distance séparant les deux points d'applications, et $F_\perp$ est la composante normale à l'axe de la force passant par ces deux points. On remarque que le module du couple est indépendant du point considéré.

IV Nature des forces

IV.1 Gravitation

IV.1.1 Définition

La gravitation est une force attractive entre corps matériels. La loi Newtonienne de la gravitation s'énonce de la façon suivante : tout corps matériel A_1 de masse m_1 exerce en toute circonstance, sur tout autre corps A_2 de masse m_2 une force attractive $\vec{F}_{1,2}$ égale et opposée à la force attractive $\vec{F}_{2,1}$ qu'exerce A_2 sur A_1.

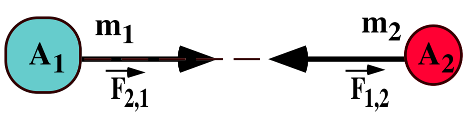


Figure IV.1

Cette force est définie par la relation suivante

$\vec{F}_{1,2} = - \vec{F}_{2,1} = - G\, m_1 m_{2/r^3}\, \vec{r}_{1,2}$

où $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} \equiv$ est la constante de gravitation universelle. Le signe négatif signale que la force est de sens inverse au vecteur $\vec{r}_{1,2}$, joignant le corps A_1 au corps A_2. Ceci traduit le fait que la force est attractive.

IV.1.2 Pesanteur

La force qui nous maintient à la surface de la terre est la force de pesanteur, plus communément appelée le poids. Elle est due à la présence du champ d'accélération gravitationnel terrestre, plus connu sous le nom de champ de pesanteur, et que l'on désigne généralement par $\vec{g}$. Ce champ n'est ni constant dans le temps, ni uniforme sur toute la surface de la terre. Les raisons à cela sont multiples et nous n'allons pas les analyser toutes en détail dans ce cours. Il est toutefois intéressant de voir (succinctement) de quoi est fait ce champ de pesanteur afin de mieux comprendre cette force, qui est le poids. Pour cela, on analyse les raisons des variations de $\vec{g}$.

La terre, du fait de sa masse, produit en tout point de sa surface, une force gravitationnelle dirigée vers son centre (voir chapitre IV.1). Cette force est uniformément répartie si l'on omet le fait que la terre n'est pas tout à fait ronde. Bien évidemment, tous les corps à la surface de la terre exercent entre eux une attraction, mais celle-ci est tellement faible comparée à celle que la terre exerce sur nous, qu'on la néglige. Par contre, l'influence des autres astres, à la surface de la terre, n'est pas tout à fait négligeable. Néanmoins, leur force, du fait de leur éloignement, est beaucoup plus petite que celle de la terre. Le phénomène des marées est là pour témoigner de cette influence. En effet, si l'on s'intéresse à l'influence d'un astre quelconque, en révolution autour de la terre, on démontre que tout se passe comme si le plan méridien, perpendiculaire à la direction terre-astre, exerce un champ de force de répulsion à la surface de la terre. Ce champ de répulsion est représenté par les flèches en trait gras sur la figure IV.2.

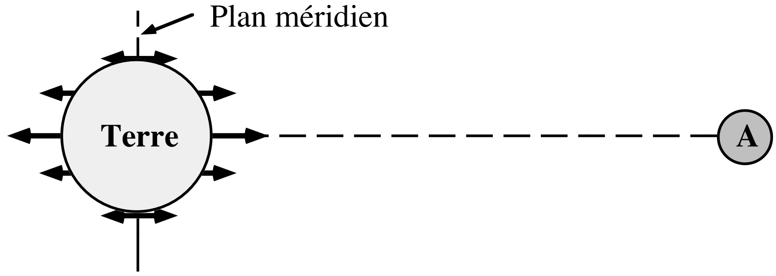


Figure IV.2 On représente, ici, le champ de gravitation produit, sur la surface de la terre, par un astre (lune) en révolution autour d'elle et contenu dans son plan équatorial.

Ce champ de force permet d'expliquer l'existence de deux marées quotidiennes que la lune produit sur la terre. Il prouve donc la variation de $\vec{g}$ avec le temps. Si l'on veut se rapprocher encore plus de la réalité, on doit rajouter l'influence du soleil afin d'expliquer le phénomène des marées de vive-eau et celles de morte-eau. C'est ce que l'on fait sur la figure suivante.

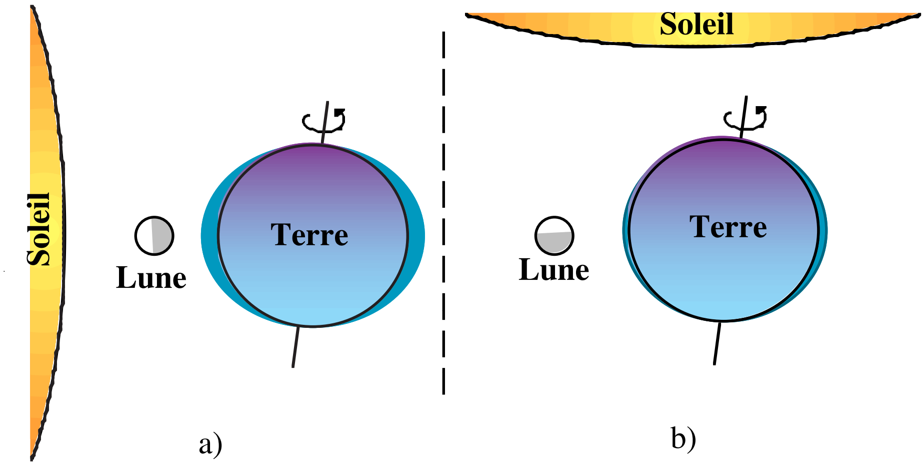


Figure IV.3 a) L'effet du soleil s'ajoute (cas a)) à celui de la lune ou alors se retranche (cas b)).

Les effets de la lune et du soleil se combinent pour s'ajouter ou au contraire s'opposer. Ils s'ajoutent lorsque les trois astres sont alignés, c'est à dire à la pleine et à la nouvelle lune (vive-eau). Ils s'opposent lorsque la direction terre-lune est perpendiculaire à la direction terre-soleil (morte-eau). Quoiqu'il en soit, l'influence de la lune est à peu près 2 fois supérieure à celle du soleil.

La rotation de la terre autour de son axe est une autre raison importante qui engendre la non-uniformité du champ de pesanteur. En effet, cette rotation induit une force centrifuge* qui s'oppose partiellement à l'attraction terrestre. L'intensité de cette force varie avec la latitude du point considéré. Ainsi, alors qu'une personne située exactement aux pôles ne subit aucun déplacement, une autre située à l'équateur aura effectué un grand déplacement (le périmètre de la terre à l'équateur = 40000 km). La personne située au pôle ne subit pas de

---

* Cette force centrifuge est identique à la force que l'on ressent lorsque l'on est dans une voiture négociant un virage à vive allure. Cette force a tendance à nous pousser vers l'extérieur du virage.

force centrifuge tandis qu'à l'équateur cette force centrifuge est maximale.

Afin de fixer un peu les idées, on donne ici quelques unes des valeurs de g, obtenues par addition de l'accélération centrifuge à l'accélération gravitationnelle terrestre. Au pôle g = 9.83 ms^{-2} , à l'équateur g = 9.78 ms^{-2} au niveau de la Tunisie g = 9.799 ms^{-2}. On a négligé, pour le calcul de ces valeurs, l'effet des autres astres. On note à travers ces valeurs que le plus grand écart est de 5%.

Ce qu'il faut retenir pour ce cours c'est que, bien que ce champ de pesanteur soit la résultante de plusieurs facteurs, il apparaît raisonnable de le considérer constant et uniforme. Il a la dimension d'une accélération qui est dirigée vers le centre de la terre, avec une valeur moyenne proche de 9.8 ms^{-2}.

IV.1.3 Poids

D'après le deuxième principe de la dynamique, la présence du champ de pesanteur implique que tout corps massique est soumis à une force qui est son poids. D'après les caractéristiques de $\vec{g}$, précédemment décrites, cette force est verticale dirigée vers le bas. L'expression de cette force, que l'on note $\vec{P}$, est

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

L'unité du poids dans le S.I. est le Newton (N) et non le kg, comme on l'utilise dans la vie courante. La variation du poids, qui est fonction de la position où s'effectue la mesure, est due à la variation de g et non à celle de la masse. Le kg est l'unité servant à mesurer la masse dont la valeur est constante.

IV.1.4 Centre de masse ou centre d'inertie

Comment s'applique le poids sur un objet ? Pour répondre à cette question, considérons un corps possédant une extension spatiale et soumis uniquement à la force de pesanteur. Comme dans la pratique, on utilise des corps dont les dimensions sont négligeables par rapport à celles de la terre, il est tout à fait raisonnable de considérer $\vec{g}$ uniforme sur tout leur volume. Imaginons maintenant un découpage du corps en petits éléments de volume dV, comme cela est représenté sur la figure suivante.

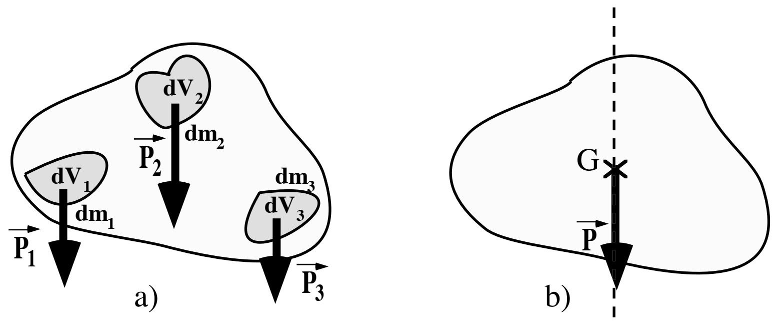


Figure IV.4 Par définition, le centre de masse, de l'objet représenté ici, est l'endroit où la résultante de tous les $\vec{P}_i$ ne provoque pas sa rotation. Cette définition définit en fait un axe vertical et pas seulement un point.

Chacun des éléments, aussi petites soient-ils, subit l'accélération $\vec{g}$ et donc son poids associé à sa masse dm. L'objet est donc soumis à un ensemble de forces parallèles formé par le poids de chacun des éléments. Cependant, il existe un endroit particulier du corps pour lequel la résultante, de toutes ces forces (qui peuvent être une infinité si l'élément de volume découpé est infiniment petit), n'a pas tendance à faire tourner le corps autour de lui même. Cet endroit définit le centre de masse (ou encore centre d'inertie) du corps qui sert de point d'application pour définir son poids global. Pour localiser cet endroit, on dispose de deux méthodes. La première est de résoudre la condition de l'équilibre de rotation qui s'énonce de la façon suivante : la somme des moments de tous les éléments de forces par rapport au centre de masse est nulle. La deuxième est d'utiliser la définition du barycentre.

Avant de décrire ces deux méthodes, il est utile de distinguer deux types de systèmes. Les systèmes composés d'objets multiples, disjoints les uns des autres. Dans ce cas, on parle de système discret. L'autre cas est celui d'un système composé d'un seul corps. Dans ce cas, on parle de système continu.

a) Système matériel discret

On considère, ici, le système formé par trois objets disjoints A_1, A_2 et A_3 de masse respective m_1, m_2 et m_3, représenté sur la figure suivante.

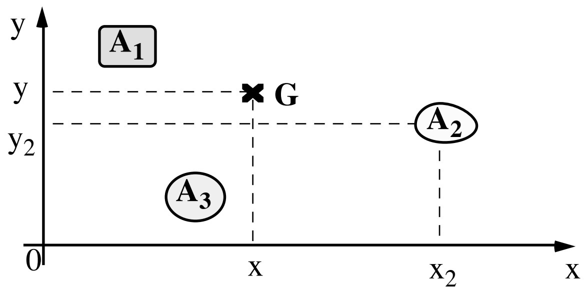


Figure IV.5

On suppose que la taille de ces objets est suffisamment petite, par rapport aux dimensions du système, de sorte que l'on peut les considérer comme des corps ponctuels. On utilise, pour les situer, un repère dont l'axe des abscisses est l'horizontale. On rappelle que la verticale, sur terre, est définie par la direction de $\vec{g}$. Ainsi le corps A_1 se situe en (x_1, y_1), le corps A_2 est à (x_2, y_2) et le corps A_3 (x_3, y_3).

- Calcul du centre masse à partir de la définition du barycentre

La relation donnant la position du barycentre d'un système s'écrit:

$$\Sigma_i\ m_i.\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \qquad \text{IV.1}$$

On désigne, dans tout ce qui suit, par (x_G, y_G) les coordonnées de ce barycentre. Après projection de l'équation IV.1 sur les axes du repère, on obtient le système suivant

$$m_1 \left(\overline{x_G - x_1}\right) + m_2 \left(\overline{x_G - x_2}\right) + m_3 \left(\overline{x_G - x_3}\right) = 0 \qquad \text{IV.2}$$
$$m_1 \left(\overline{y_G - y_1}\right) + m_2 \left(\overline{y_G - y_2}\right) + m_3 \left(\overline{y_G - y_3}\right) = 0$$

On va voir, à travers la résolution de la condition d'équilibre de rotation, que seule la première équation est utile pour la détermination de la position du centre de masse.

- Calcul du centre de masse à partir de la condition d'équilibre de rotation

Écrivons que la somme des moments des forces par rapport à G est nulle

$$\sum_i \vec{M}_{\vec{P_i}/G} = \overrightarrow{GA_1} \text{ X } \vec{P_1} + \overrightarrow{GA_2} \text{ X } \vec{P_2} + \overrightarrow{GA_3} \text{ X } \vec{P_3} = \vec{0} \qquad \text{IV.3}$$

<=>

$$\begin{pmatrix} \overline{x_G - x_1} \\ \overline{y_G - y_1} \end{pmatrix} \text{X} \begin{pmatrix} 0 \\ -P_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x_G - x_2} \\ \overline{y_G - y_2} \end{pmatrix} \text{X} \begin{pmatrix} 0 \\ -P_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x_G - x_3} \\ \overline{y_G - y_3} \end{pmatrix} \text{X} \begin{pmatrix} 0 \\ -P_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} P_1 \left(\overline{x_G - x_1}\right) + P_2 \left(\overline{x_G - x_2}\right) + P_3 \left(\overline{x_G - x_3}\right) = 0 \\ 0 * \left(\overline{y_G - y_1}\right) + 0 * \left(\overline{y_G - y_2}\right) + 0 * \left(\overline{y_G - y_3}\right) = 0 \end{cases}$$

La projection sur l'axe horizontal redonne l'équation IV.2 après simplification par g. Par contre, la projection sur l'axe vertical montre que y_G est indéterminé puisqu'on aboutit à $0 * y_G = 0$. Cela signifie que le centre de masse peut être situé sur n'importe quel point d'un axe vertical passant par l'abscisse du barycentre.

b) Système matériel continu

La recherche du centre de masse, pour un système composé d'un seul corps, n'est pas toujours évidente. La forme géométrique et la non homogénéité rendent parfois le calcul impossible sans quelques manipulations et approximations préalables. En ce qui concerne la géométrie, nous avons déjà montré, à travers l'exemple de la figure III.5.d), comment procéder afin de simplifier les calculs. Pour ce qui est de la non homogénéité, on admet généralement qu'un corps est homogène lorsque les matériaux le composant se répartissent de façon uniforme. Lorsque les matériaux sont répartis de façon distincte, comme c'est le cas lorsque l'on associe des objets pour n'en faire qu'un, il convient alors de diviser le corps en autant de sous-objets qu'il y a de matériaux.

Les simplifications faites transforment le système initial, composé d'un seul corps non homogène et de forme complexe, en un système composé de plusieurs corps homogènes et de forme simple, collés les uns aux autres. La figure suivante décrit, dans le cas d'une dalle supportant un talus de terre avec sa végétation, une telle transformation.

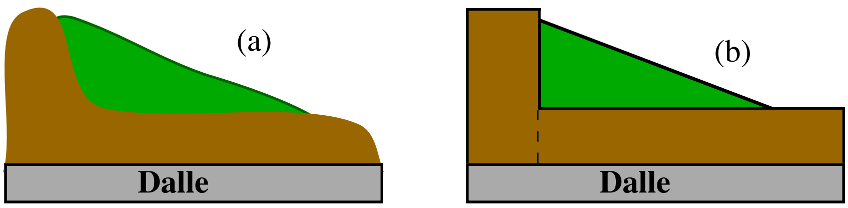


Figure IV.6 Le schéma (a) décrit une dalle supportant un talus de terre avec sa végétation tel qu'on peut le trouver dans la réalité. Le schéma (b) indique le modèle simplifié servant au calcul du centre de masse.

Dans le cas illustré sur la figure IV.6, l'objet étudié se compose de terre et de végétation. Le modèle simplifié (figure IV.6 (b)) conduit à 2 rectangles de terre plus un triangle de végétation. Supposons que l'on connaisse la position du centre de masse pour chacun des 3 éléments, on utilise alors la formule IV.2 pour le calcul du centre de masse de tout le corps. En effet, tout se passe comme si il s'agissait d'un système discret. Toutefois, une différence fondamentale subsiste avec les systèmes discrets. Elle est due au fait que la taille des sous-objets n'est plus négligeable par rapport à la taille de l'ensemble du système.

Lorsque la position du centre de masse n'est pas connue il est possible de le calculer. On développe, dans ce qui suit, le calcul détaillé du centre de masse pour des objets homogènes et de forme simple. On se limite ici à des corps à deux dimensions. On suppose, dans une première approximation, que toutes les formes peuvent être modélisées par le rectangle, le triangle et l'arc de cercle.

Considérons une nouvelle fois le repère (0xy). La méthode consiste à découper l'objet en tranches infinitésimales dans le sens du poids. On définit alors des tranches d'épaisseur dx. Le poids de ces tranches dépend bien évidemment de leur hauteur qui peut être variable comme c'est le cas pour le triangle ou le cercle. Ainsi, le poids de l'objet est décrit par une fonction de x qui n'est autre que la charge linéique multipliée par l'épaisseur de la tranche soit dx. Supposons que la longueur de l'objet, dans la direction horizontale, est L ou R pour l'arc de cercle. Désignons par q(x) la charge linéique. La position du centre de masse est alors définie par la relation,

$$\int_0^L (x_G - x)\, q(x)\, dx = 0 \qquad \text{IV.4}$$

Dans cette expression, x_G est la position du centre de masse sur l'axe horizontal et x la variable d'intégration. Cette équation est identique à l'équation IV.2, sauf que la somme discrète Σ a été remplacée par la somme continue $\int$ (plus connue sous le nom de signe intégrale), et que la variable discrète x_i est remplacée par la variable continue x.

Appliquons alors l'équation IV.4 au rectangle au triangle et à l'arc de cercle. On les décrit à l'aide de la fonction q(x) en trait gras sur la figure.

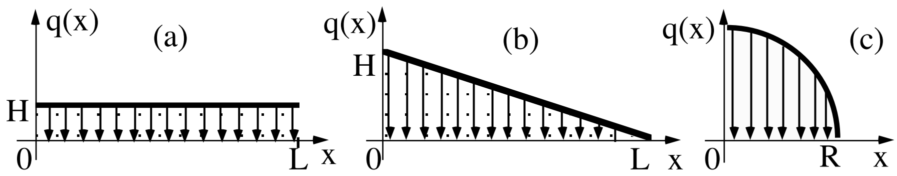


Figure IV.7 On décrit ici les trois géométries de bases servant à modéliser les formes complexes. Elles sont décrites par la fonction q(x) (en trait gras sur la figure)

Ainsi, pour le rectangle, q(x) est constant et vaut la hauteur du rectangle. Portons cette valeur dans l'équation IV.4 et sortons la du signe intégrale, il reste à calculer

$$\int_0^L (x_G - x)\, dx = 0$$

qui conduit au résultat bien connu $x_G = L/2$

En ce qui concerne le triangle, la fonction q(x) est linéaire, valant H pour x = 0 et 0 pour x = L (voir figure IV.7 (b)). La fonction répondant à ces conditions a l'expression suivante

$$q(x) = H - x*H/L$$

On remplace q(x) par son expression dans l'équation IV.4. On doit alors calculer l'intégrale

$$\int_0^L (x_G - x)\,(H - \frac{H}{L}\,x)\,dx = 0 \qquad\qquad \Rightarrow x_G = L/3$$

Pour l'arc de cercle de rayon R (figure IV.7.(c)), la charge linéique s'écrit

$$q(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

La résolution de l'équation IV.4 (voir annexe B) conduit cette fois à

$$x_G = 4\,R\,/\,(3\,\pi)$$

IV.2 Forces de contact ou réactions d'appuis

De façon générale, les appuis s'opposent aux forces provoquant la mise en mouvement des objets. Nous avons vu que les conditions de la statique conduisent, pour des problèmes plan, à un système de trois équations. Les deux premières traduisent l'équilibre de translation selon les axes du repère, et la troisième, qui se trouve sur l'axe perpendiculaire au plan, traduit l'équilibre de rotation.

Lorsque les réactions introduisent trois inconnues, le système n'admet qu'une solution. Il est, dans ce cas, isostatique. Lorsque les actions introduisent plus de trois inconnues, le problème est mathématiquement indéterminé. Le système est dit hyperstatique. Pour lever l'indétermination, on a besoin d'équations supplémentaires qui sont fournies par la RDM. On ne s'intéresse cette année, qu'à des systèmes isostatiques.

Les appuis réels sont, d'un point de vue microscopique, des systèmes de forces complexes (voir figure III.2). On peut cependant modéliser ces réactions à l'aide de système de forces simples. On passe en revue, dans ce chapitre, les différents types d'appuis fréquemment rencontrés en développant les modèles utilisés pour les décrire mathématiquement.

IV.2.1 Force de frottement

Les forces de frottement ont pour effet de s'opposer au déplacement relatif de deux corps se trouvant en contact. Ces forces sont parallèles aux surfaces. On les désigne par "R_t" (réaction tangentielle). Elles dépendent d'une part, de la force normale joignant les deux corps, que l'on désigne "R_N" (réaction normale), et d'autre part, de la nature des surfaces en contact. Le matériau constituant le corps et la rugosité des surfaces sont les principaux paramètres définissant la nature de la surface. Ces deux paramètres sont pris en compte, dans le bilan des forces, par un coefficient, que l'on note μ. La force de frottement peut alors se mettre sous une forme simple :

$$R_t = \mu \, R_N$$

a) Frottements statiques

Le frottement statique intervient entre surfaces immobiles, l'une par rapport à l'autre.

Ainsi, lorsqu'une force croissante est appliquée à un objet maintenu en équilibre par un appui, la force de frottement statique, entre les deux surfaces en contact, croît dans le même temps pour s'opposer au déplacement de l'objet.

Cette force ne peut dépasser une valeur limite. On désigne par "R_{tmax}" cette valeur maximale. Ceci implique que pour une valeur limite de la force appliquée, la réaction due au frottement n'est plus suffisante pour empêcher la mise en mouvement de l'objet. Ceci se traduit, pour l'expression de la force de frottement par l'inégalité :

$$R_t \leq R_{tmax} = \mu_s \, R_N$$

b) Frottements dynamiques

Lorsque les deux objets sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, une force de frottement persiste et réduit la vitesse de déplacement. Les frottements dans ce cas sont dits dynamiques. Leur expression est la suivante;

$$R_t = \mu R_N.$$

Ces forces ont une valeur qui est ordinairement inférieure au maximum atteint par la force de frottement statique.

IV.2.2 Appuis simples

L'appui simple représente les réactions mises en jeu lorsque l'on pose un objet sur un autre. Dans ce cas, la réaction est décrite par une force dont la direction et le point d'application sont connus, la direction étant bien sûr la normale à la surface de contact. Il ne reste plus alors qu'à déterminer l'intensité de la force.

Cette réaction est désignée par différents symboles. On montre ici quelques uns de ces symboles.

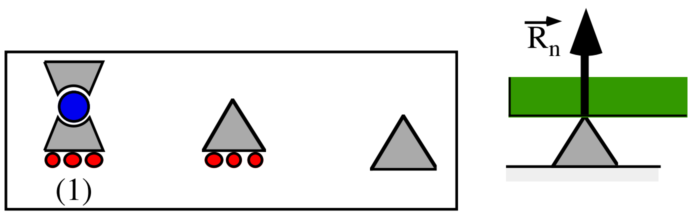


Figure IV.8 Dans l'encadré figure différents symboles. Le symbole (1) explicite mieux les degrés de liberté permis que les 2 autres.

Cet appui permet 2 degrés de liberté : la translation, de la structure étudiée (en vert sur la figure IV.8), par rapport à la surface d'appui, et la rotation autour du point d'application. C'est typiquement la situation que l'on rencontre lorsqu'on pose un objet sur un pivot.

IV.2.3 Appuis articulés

L'appui articulé, également appelé appui double, modélise toutes les liaisons réalisées à l'aide d'une articulation. Contrairement à l'appui simple, on ne connaît pas la direction de la force. Donc, cette fois, on doit déterminer deux inconnues, qui sont l'intensité et la direction.

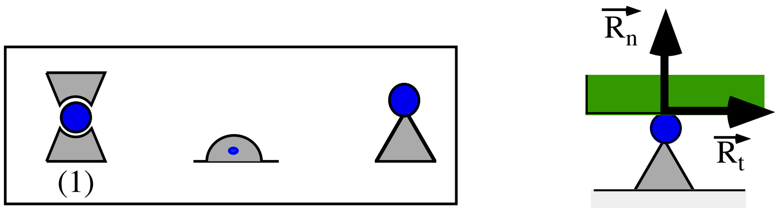
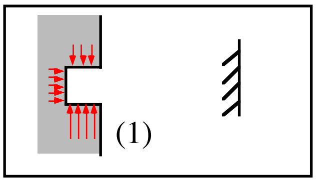


Figure IV.9 Dans l'encadré figure différents symboles. Comme pour la figure IV.8 le symbole (1) explicite les degrés de liberté permis. Le dernier schéma montre la réaction.

Cet appui permet 1 degré de liberté, la rotation autour du point d'application. Il est commode de décomposer cette réaction en une composante normale à la surface d'appui et une composante parallèle à cette surface (voir figure IV.9).

IV.2.4 Encastrements

Comme son nom l'indique, l'encastrement est obtenu en emboîtant la structure étudiée. Dans ce cas, ni la direction ni le point d'application de la force ne sont connus. La méconnaissance du point d'application est due au fait que chaque côté de l'encoche oppose des réactions. En effet, si l'on regarde en détail le contact entre les deux objets (voir le symbole (1) sur la figure suivante), on remarque que chacun des côtés oppose des réactions différentes réparties sur toute la surface de contact. La conséquence de l'ensemble des réactions produites, qui fait tout l'intérêt de ce type d'appui, est d'empêcher toute rotation de la structure. En d'autres termes, il produit un moment contraire aux moments imposés à la structure que l'on appelle moment d'encastrement. Ainsi, pour définir la réaction, on doit déterminer trois inconnues qui sont, l'intensité, la direction, et le moment d'encastrement.



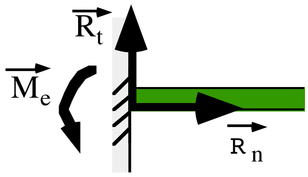


Figure IV.10 Dans l'encadré figure différents symboles. On voit sur le symbole (1), que même la rotation n'est plus permise. Le dernier schéma montre la réaction.

Cet appui ne permet aucun degré de liberté. Cette réaction se décompose en trois éléments qui sont, la réaction normale à la surface d'appui, la réaction parallèle à cette surface et le moment d'encastrement (voir figure).

On peut dire, en guise de conclusion concernant les forces de contact, que le point important dans la description d'une liaison réaliste réside dans le choix de l'appui théorique qui le modélisera le plus fidèlement possible.