Cours et Exercices de Mécanique :

Mécanique du Point.

Ingénieur CESI
Préparation aux tests de sélection.

Stéphane Victori. stephanevictori@yahoo.fr

Programme de physique.

B – Mécanique

Chapitre 5 : Statique
- Forces, moments de forces,
- Equations à l'équilibre
- Notion de frottement.

Chapitre 6 : Cinématique
- Vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.
- Mouvements rectilignes uniforme et uniformément accéléré.

Chapitre 7 : Dynamique
- Notion de référentiel galiléen
- Relation fondamentale de la dynamique pour les systèmes en translation, dans un référentiel galiléen.
- Applications, notamment à la chute libre.

Chapitre 8 : Energétique
- Travail, puissance,
- Energie cinétique de translation,
- Energie potentielle de pesanteur,
- Energie mécanique.
- Théorème de l'énergie cinétique.

Répartition des séances :
Programme PFI Mars 2005.

	Thème 1	*Thème 2*	*Thème 3*
Séance 1	**Grandeurs et unités** - Grandeurs, unités - Équations aux dimensions	**Statique**	
Séance 2	**Cinématique** - Mouvement rectiligne uniforme et uniformément accéléré		
Séance 3		**Dynamique** - Systèmes en translation, - PFD, - Application à la chute libre.	
Séance 4	**Énergétique** - Energie cinétique de translation - Travail et puissance, - Energie potentielle de pesanteur, - Energie mécanique. - Théorème de l'énergie cinétique.		
Séance 5			
Séance 6	**Electricité** - Notion de résistance, de condensateur, d'inductance.	**Electrocinétique** - Loi d'Ohm - Règle du diviseur de potentiel - Lois de Kirchoff - Théorème de superposition	
Séance 7	**Electrocinétique** - Théorème de Millman		-
Séance 8	**Régime transitoire** Etude qualitative des circuits du 1^{er} et du 2^{nd} ordre en régime transitoire (RC, LR, LC, RLC).	**Régime alternatif sinusoïdal** - Grandeurs alternatives - Circuit RLC série ! - Diagramme de Fresnel	
Séance 9	**Régime alternatif sinusoïdal** - Circuit en notation complexe		
Séance 10	Test blanc Corrigé Approfondissements : partir des sujets demandés par les élèves.		

Recueil d'exercices.

La difficulté des exercices est indiquée par des carrés : □.

Pas de carré	Facile
□	Moins facile
□□	Difficile
□□□	Très difficile (pour aller plus loin).

Table des matières.

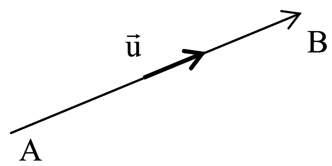
1 Rappels de notions fondamentales.

1.1 Grandeurs physiques.

Une grandeur dite scalaire est caractérisée par un nombre (« intensité ») et une unité.
Exemple : La pression s'exprime en Pascal (Pa).

Une grandeur vectorielle est caractérisée par un vecteur et une unité. Un vecteur est lui-même caractérisé par un sens et une norme.

$\overrightarrow{AB} = AB\,\vec{u}$ avec norme de u, $\|\vec{u}\| = 1$ et AB distance entre les points A et B.



1.2 Unités.

Le système international est basé sur 7 grandeurs fondamentales.

Grandeurs	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique (intensité)	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Chaque unité reçoit des mesures de référence les plus précises possibles, ce qui implique une évolution avec les précisions disponibles de l'époque. Par exemple :

1 m : longueur parcouru par la lumière dans le vide pendant 1/299 792 458 s (auparavant, il s'agissait d'une barre de platine iridié à la température de 20°C → Pavillon de Breteuil).

1 kg : masse du prototype international → Pavillon de Breteuil.

1 s : durée de 9 192 631 770 périodes du rayonnement correspondant à la transition de 2 niveaux hyperfins de base du Cs 133. La définition précédente (en gros 1/31 556 925,9747 de l'année 1900) posait des problèmes pour répéter la mesure

1 A : courant qui, maintenu dans 2 conducteurs de longueur infinie et de section négligeable, placés à 1 m de distance dans le vide, produisent une force de 2.10^{-7} N par mètre linéaire.

1 K : fraction (1/273,16) de la température thermodynamique du point triple de l'eau (liquide + solide + vapeur) définie sur le diagramme P = f (t).

1 mol : quantité d'entités élémentaires identique à celle contenue dans 0,012 kg de C12

1 cd : intensité lumineuse dans une direction donnée pour une source émettant un rayonnement monochromatique à la fréquence de 540.10^{12} Hz avec une intensité de radiation de 1/688 $W.sr^{-1}$.

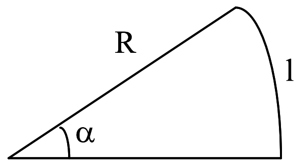
1.3 Équations aux dimensions.

Les équations aux dimensions permettent de vérifier la cohérence d'une formule ou de trouver l'unité d'une grandeur.

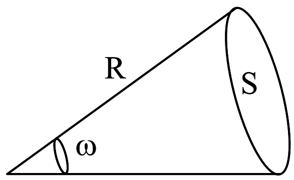
Exemple : le principe fondamental de la dynamique dit que le lien entre la force appliquée et l'accélération subie est : $\vec{F} = m\,\vec{a}$. On sait, par ailleurs que la force s'exprime en Newton et que l'accélération s'exprime en $m.s^{-2}$. On peut en déduire immédiatement l'unité du Newton : $[F] = [M]\,[L]\,[T]^{-2} \Rightarrow 1\ N = 1\ kg.m.s^{-2}$.

1.4 Nombres sans dimensions.

À deux dimensions, on définit le radian comme suit :
On a : $l = R\,\alpha$.
La longueur de l'arc de cercle est égale au rayon multiplié par l'angle en radian.
Si $\alpha = 2\,\pi$, on retrouve la formule de la circonférence du cercle :
$L = 2\,\pi\,R$.



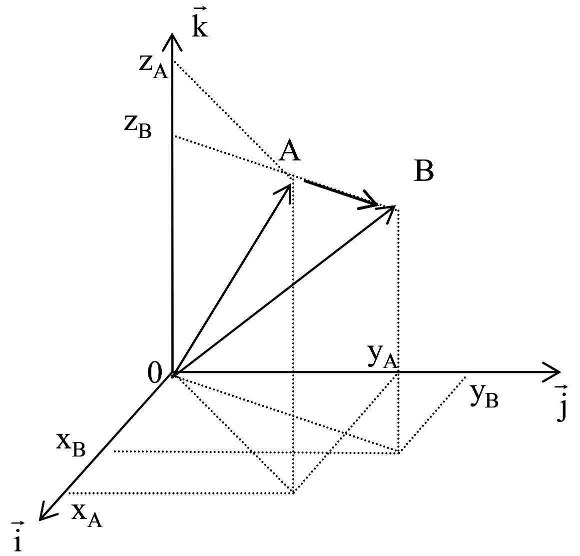
À trois dimensions, on procède de la même manière en définissant le stéradian :
On a : $S = R^2\,\omega$.
Dans le cas de la sphère, on a $\omega = 4\pi$. L'angle solide sous lequel on voit tout l'espace est $4\,\pi$ stéradian.
L'aire d'une sphère est donc : $S = 4\pi R^2$.

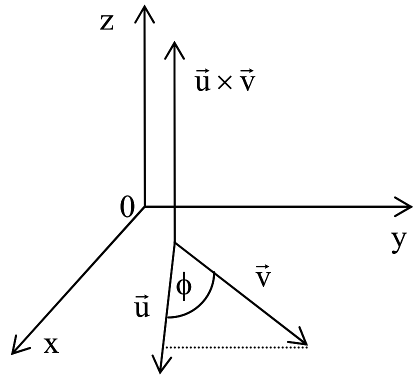


1.5 Produit scalaire et produit vectoriel

1.5.1 Détermination d'un vecteur.

Soit deux points, A et B, dans un espace à trois dimensions orthonormé de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les coordonnées des points A et B dans ce repère sont : $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$.





Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ s'écrit : $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$.
Le vecteur $\overrightarrow{OB}$ s'écrit : $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calcule aisément :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

1.5.2 Produit scalaire et norme d'un vecteur.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans un espace à 3 dimensions orthonormé de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u\, v \cos(\vec{u}, \vec{v}) = u\, v \cos\phi$$

Le résultat est un <u>scalaire</u>. Dans le repère, il est facile de montrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

La norme au carré d'un vecteur, $\|\vec{u}\|$, est donnée par le produit scalaire du vecteur par lui-même : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.

Remarque : lorsque l'on effectue le produit scalaire de deux vecteur, géométriquement, cela revient à projeter un vecteur sur l'axe définit par le second.

1.5.3 Produit vectoriel.

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est :

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = u\, v \sin(\vec{u}, \vec{v})\ \vec{e} = u\, v \sin\phi\ \vec{e}.$$

Le résultat est un vecteur perpendiculaire aux deux autres vecteurs tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \text{ x } \vec{v})$ forme un trièdre directe. Dans le repère, le produit vectoriel s'obtient en écrivant :

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_yv_z-u_zv_y\\u_zv_x-u_xv_z\\u_xv_y-u_yv_x\end{vmatrix}}.$$

Remarque : $\vec{u}\ \mathrm{x}\ \vec{v}=-\vec{v}\ \mathrm{x}\ \vec{u}$.

On pourra vérifier ou démontrer que : $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, relation dite : « back cab ».

2 Mécanique du point matériel.

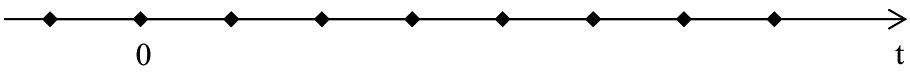
2.1 Généralités.

2.1.1 Notion d'évènement

Les phénomènes physiques peuvent être considérés comme des ensembles d'évènements, de phénomènes élémentaires caractérisés en associant à l'espace ambiant et au temps deux espaces métriques, l'un à 3D et l'autre à 1D.

2.1.2 Mesure du temps

La mesure du temps suppose une orientation du temps, du passé vers le futur. Elle nécessite une origine et un moyen de mesure, soit une horloge.



2.1.3 Repère d'espace.

On appelle repère d'espace R un ensemble de points dont les distances mutuels sont invariables au cours du temps.
On caractérise généralement un tel repère d'espace par un point d'espace O, choisi conventionnellement comme origine du repère, et une base orthonormée ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). On note alors R = (O, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$) ou plus brièvement R = Oxyz.

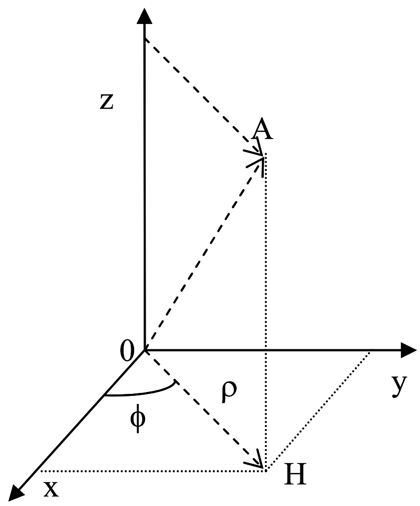
2.1.4 Temps d'un repère. Référentiel.

L'ensemble d'un repère d'espace et d'un repère de temps constitue un référentiel.

2.2 Cinématique.

La cinématique est l'étude des mouvements des corps indépendamment des causes qui les produisent.

2.2.1 Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point.



Le vecteur position lié au point A dans le référentiel R(O,x,y,z) est : $\overrightarrow{OA}$

Par définition, la vitesse du point A par rapport à R est :

$$\boxed{\vec{v}(A/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R}.$$

Son accélération est :

$$\boxed{\vec{\gamma}(A/R) = \left(\frac{d\vec{v}(A/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right)_R}.$$

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OA} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z$ où $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les vecteurs de la base et sont normés à l'unité. On peut écrire : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

La vitesse s'obtient en dérivant le vecteur position par rapport au temps. La dérivée des vecteurs de la base dans le repère R est nulle puisqu'ils sont constants. On en déduit :

$\vec{v}(A/R)\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ et $\gamma(A/R)\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$; la notation avec un point signifie $\frac{\partial}{\partial t}$.

2.3 Dynamique du point.

La dynamique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes, appelées Forces, qui les produisent.

2.3.1 Masse.

Expérience : il est plus difficile de communiquer une vitesse à un ballon de football qu'à une balle de tennis. La vitesse d'un corps ne suffit pas à décrire son mouvement. Il faut introduire une quantité caractérisant la « répugnance » du corps à toute modification de son mouvement, c'est-à-dire son inertie. Nous admettons qu'il est possible d'associer à un point matériel un scalaire positif, m, qui est sa masse. La masse est supposée indépendante de l'état du mouvement du point et du référentiel choisi.

2.3.2 Quantité de mouvement.

La quantité de mouvement (parfois appelé Impulsion) pour un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ par rapport à R est :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}\ .$$

2.3.3 Principe de l'inertie.

2.3.3.1 Première loi de Newton :

Enoncé historique : Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces « imprimées » le contraignent d'en changer.

Enoncé actuel : Par rapport à tout référentiel privilégié R, qualifié de galiléen, tout point matériel A, éloigné de tout autre corps, a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v} = \overrightarrow{cte}$.

La propriété ci-dessus constitue une définition des repères galiléens et le principe d'inertie postule leur existence. Le caractère « privilégié » des référentiels galiléens apparaît dans le fait que les lois de la mécanique et notamment le Principe Fondamental ne sont valables que dans de tels référentiels.

On introduit le référentiel de Copernic : Le référentiel de Copernic a, par définition son origine au barycentre du système solaire ; ses axes sont définis par les directions de trois étoiles très éloignées (dites « fixes »). Un repère galiléen est un repère en translation rectiligne et uniforme dans le repère de Copernic.

2.3.3.2 Notions de Force.

Considérons un point dont le mouvement n'est pas rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen (son accélération est différente de 0). Pour expliquer un tel mouvement, on admet que le point n'est pas isolé : il est soumis à une interaction. L'expérience montre que toutes les interactions peuvent être décrites par une grandeur vectorielle que nous appellerons Force.

2.3.4 Principe fondamental de la dynamique du point.

Dans un référentiel galiléen, une modification de la vitesse d'un point doit être attribuée à une cause : la force $\vec{F}$ agissant sur le point. Encore faut-il tenir compte de l'inertie du point sur lequel s'exerce la force :

Enoncé historique : Le changement de mouvement est proportionnel à la force imprimée et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est imprimée.

Enoncé actuel : Par rapport à un référentiel galiléen R, le mouvement d'un point matériel A de masse m soumis à plusieurs forces extérieures, dont la somme est $\sum \vec{F}$, satisfait la relation :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}},$$

soit si la masse m est constante :

$$\boxed{\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}}}.$$

2.3.5 Principe des actions réciproques ou troisième loi de Newton

Soit deux points matériels M_1 et M_2 en interaction. Les forces d'interaction $\vec{F}_{M_1M_2}$ et $\vec{F}_{M_2M_1}$ sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1M_2). Ce principe des actions réciproques, nommés principe de l'action et de la réaction, se traduit par : $\boxed{\vec{F}_{M_1M_2} = -\vec{F}_{M_2M_1}}$.

Cas particulier des forces intérieures : La somme des forces intérieures appliquées à un point matériel ou un objet solide est nulle. Dans le cas contraire, il s'animerait d'un mouvement ou se déformerait.

2.3.6 Cas Particulier de l'équilibre. Statique.

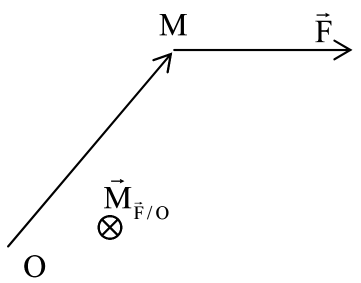
Lorsqu'un système est à l'équilibre, la somme des forces et nulle et donc l'accélération est nulle.

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

2.3.7 Moment d'une force.

Par définition, le moment en un point O de la force $\vec{F}$ appliquée en un point M est :

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OM} \text{ x } \vec{F}}$$



Si la force est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, le moment est nul. Si les points M et O sont confondus, le moment est nul.

L'unité du moment d'une force est : N.m.

2.4 Cas particulier d'un système en équilibre statique.

On se limite au cas particulier où le solide considéré est à l'équilibre.

Dans ce cas, d'après le paragraphe sur le principe fondamental de la dynamique, la somme des forces est nulle. Par ailleurs, le solide étant à l'équilibre statique ou en mouvement de translation uniforme, la somme des moments des forces appliquées au même point A est nulle aussi.

Cela se traduit par : $\boxed{\begin{cases} \sum \vec{M}_{\vec{F}/A} = \vec{0} \\ \sum \vec{F} = \vec{0} \end{cases}}$.

2.5 Notions de frottement.

2.5.1 Généralité.

Les forces de frottements s'opposent au déplacement relatif de deux surfaces en contact. Ces forces sont parallèles aux surfaces.

Le frottement statique intervient entre surfaces immobiles l'une par rapport à l'autre. Lorsqu'une force croissante est appliquée à un objet reposant sur une surface, par exemple, la force de frottement statique croît d'abord en même temps qu'elle pour s'opposer au mouvement. Une certaine force limite est atteinte que la force de frottement statique ne peut dépasser et compenser, l'objet se met alors en mouvement. Une fois que l'objet est en mouvement, la force de frottement de glissement (ou dynamique) demeure constante et prend une valeur ordinairement quelque peu inférieure au maximum atteint par la force de frottement statique.

2.5.2 Coefficient de frottement.

Les forces de frottement entre deux surfaces dépendent de la nature de ces surfaces et de la force normale qu'elles exercent l'une sur l'autre. La nature de ces forces se traduit par un coefficient de frottement μ dont la valeur dépend des matériaux en contact.

L'expression de la norme de la force de frottement s'écrit :

$$F_f = \mu N$$

Force de frottement = coefficient de frottement x force normale.

On distingue le coefficient de frottement statique μ_s qui représente la valeur maximale. Le coefficient de frottement de glissement μ est toujours inférieur à μ_s.

Valeurs typiques :
Bois sur le bois : $\mu_s = 0{,}5$; $\mu = 0{,}3$.

2.6 Puissance et énergie en référentiel galiléen.

2.6.1 Puissance d'une force dans un référentiel R.

Soit un point matériel de masse m, se trouvant au point M du référentiel R avec la vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$. Ce point matériel subissant une force $\vec{F}$, la puissance $P(\vec{F})_{/R}$ de cette force est :

$$P(\vec{F})_{/R} = \vec{F}.\vec{v}(M)_{/R}\,.$$

L'unité de puissance est le Watt, 1 W = 1 kg. $m^2.s^{-3}$.

2.6.2 Travail d'une force dans un référentiel R.

Le travail élémentaire $dW(\vec{F})_{/R}$ de la force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M est, pour la durée infinitésimale dt :

$$\boxed{dW(\vec{F})_{/R} = P(\vec{F})_{/R}\,dt = \vec{F}.\vec{v}(M)_{/R}\,dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}}\,,$$

avec O un point fixe du référentiel R.

L'unité du travail est le Joule, 1 J = 1 kg. $m^2.s^{-2}$.

2.6.3 Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique.

2.6.3.1 <u>Théorème de la puissance cinétique.</u>

Soit $\vec{F}$ la force appliquée à un point matériel M, de masse m et animé d'une vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$.
En multipliant scalairement les deux membres de la relation fondamentale de la dynamique, on obtient :

$$\vec{F}.\vec{v}(M)_{/R} = m\vec{v}(M)_{/R}\cdot\frac{d\vec{v}(M)_{/R}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2(M)_{/R}\right)}{dt} = \frac{dE_c}{dt}\,,$$

La quantité $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ est par définition l'énergie cinétique de la particule dans le référentiel R. Elle a la même dimension que le travail et s'exprime en joule.

Ainsi :

Dans un référentiel Galiléen, la puissance de la force appliquée à un point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique.

$$P(\vec{F})_{/R} = \frac{dE_c}{dt}\,.$$

2.6.3.2 Théorème de l'énergie cinétique.

On peut réécrire l'expression précédente comme suit : $P\left(\vec{F}\right)_{/R} dt = dE_c$.

D'où : $dW\left(\vec{F}\right)_{/R} = P\left(\vec{F}\right)_{/R} dt = dE_c \rightarrow \boxed{dE_c = dW\left(\vec{F}\right)_{/R}}$.

Considérons le déplacement du point M d'une position M_1 au temps t_1 à une position M_2 au temps t_2 le long d'une courbe, alors :

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} P\left(\vec{F}\right)_{/R} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{M} = E_c\left(t_2\right) - E_c\left(t_1\right)}$$

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la force totale qui lui est appliquée.

On peut écrire : $\boxed{W = \Delta E_c}$. Cette formule est à retenir absolument.

2.6.4 Champs de forces conservatives.

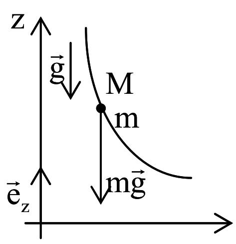
Introduction par l'exemple :

2.6.4.1 Particule dans un champ de pesanteur uniforme.

Soit une particule de masse m dans un champ de pesanteur caractérisé par $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$. Le travail élémentaire du poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ sur l'intervalle dz est :

$$dW_{\vec{P}} = -mg\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dz = -mg\ dz = -d\left(mgz\right),$$

Le travail du poids entre les points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ est : $W_{\vec{P}} = \int_{z_1}^{z_2} -mg\ dz = mg\left(z_1 - z_2\right)$.



Le travail du poids est indépendant du chemin suivit entre les point $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$.

2.6.4.2 Gradient d'une fonction et différentielle totale exacte.

Soit ϕ(x,y,z) une fonction scalaire des coordonnées cartésiennes x, y et z d'un point de l'espace, et soient $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ des vecteurs unitaires de base sur les axes Ox, Oy et Oz. On appelle *gradient* de la fonction ϕ(x,y,z) le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}\ \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Considérons un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dOM}$ du point M. Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{dOM} = dx\ \vec{e}_x + dy\ \vec{e}_y + dz\ \vec{e}_z.$$

Effectuons le produit scalaire de $\overrightarrow{grad}\ \phi$ par $\overrightarrow{dOM}$:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\ \phi \cdot \overrightarrow{dOM} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi.}$$

Nous reconnaissons la différentielle totale exacte de $\phi(x,y,z)$.

2.6.4.3 Énergie potentielle

Dans certains cas (ex : champ de forces newtonien de gravitation, électrique, etc.), le travail total effectué par la force $\vec{f}$ lorsque la particule se déplace de M_1 à M_2 est indépendant du trajet suivi, donc indépendant de la courbe (C) qui relie M_1 et M_2. Dans ce cas, on dit que la force $\vec{f}$ est conservative, ou encore que la force $\vec{f}$ dérive d'une énergie potentielle E_p définie par :

$$\boxed{E_p = -\int \vec{f} \cdot d\vec{r}}$$

ou

$$\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\ E_p.}$$

La fonction scalaire $E_p(x,y,z)$ est appelée *potentiel du champ* $\vec{f}$ ou *énergie potentielle* du point dans le champ.

Si l'on calcule le travail de la force sur un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dOM}$, on a :
$dW = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -\overrightarrow{grad}\ E_p \cdot \overrightarrow{dOM} = -dE_p = dW_{\vec{f}}$. On en déduit :

$$\boxed{dW_{\vec{f}} = -dE_p}.$$

et donc :

$$W_{\vec{f}} = E_p(M_1) - E_p(M_2).$$

<u>Remarque</u> : Si M_1 et M_2 sont confondus, le travail de la force est nul.

<u>Exemple</u> : On a démontré que le travail du poids est indépendant du chemin suivit. Cela signifie que le poids dérive d'une énergie potentielle.
$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}E_P \rightarrow dW\left(\vec{P}\right)_{/R} = \vec{P}.\overrightarrow{dOM} = -\overrightarrow{grad}E_P.\overrightarrow{dOM} = -dE_P = -mg\ dz.$
D'où l'expression de l'énergie potentielle associée au poids : $E_P = mgz + cte$.

2.6.4.4 Énergie mécanique d'un point matériel dans un référentiel R

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit, sous forme différentielle : $dW = -dE_c$.
Si le champ de force dérive d'un potentiel alors :

$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\ E_p$, on a donc : $dW = \vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM} = -dE_p$, qui donne :

$d\left(E_c + E_p\right) = 0$, par intégration :

$\boxed{E_c + E_p = E_m}$.

La quantité somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est *l'énergie mécanique* du système.
D'après la relation encadrée :

Lorsqu'un point matériel se déplace dans un champ de force dérivant d'un potentiel, son énergie mécanique reste constante au cours du mouvement.

2.7 Résumé Mécanique :

2.7.1 Vitesse et accélération :

Soit un point A mobile dans R(O,x,y,z), sa vitesse est : $\vec{v}\left(A/R\right) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R$.

2.7.2 Son accélération est :

$$\vec{\gamma}\left(A/R\right) = \left(\frac{d\vec{v}\left(A/R\right)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}\right)_R.$$

2.7.3 Principe Fondamental de la dynamique :

$\vec{p} = m\vec{v}$, $\sum \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\ \vec{\gamma}$ si la masse est constante.

2.7.4 Poids et Gravitation.

$\vec{P} = m\vec{g}$.

$$\vec{F}_{1->2} = -G\frac{m_1 m_2}{d^2}\vec{e}_{12}$$

2.7.5 Moment des forces.

$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OM} \text{ x } \vec{F}$. A l'équilibre : $\begin{cases} \sum \vec{M}_{\vec{F}} = \vec{0} \\ \sum \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$

2.7.6 Théorème de l'énergie cinétique. Energie potentielle.

$\Delta E_c = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$ avec $dW\left(\vec{F}\right)_{/R} = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$.
Travail du poids : $W_P = mgh$ avec h la hauteur algébrique.
Théorème de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p$.

3 Enoncés.

3.1 Rappel de notions fondamentales.

3.1.1 Unité de G.

L'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre est donnée par l'expression :
$g = G\ Mt / R_t^2$.
G est l'accélération de la pesanteur.
G est la constante de gravitation universelle,
Mt, la masse de la Terre,
R_t, le rayon de la Terre.
Quelle est l'unité de G ?

3.1.2 Unité de la constante de raideur d'un ressort.

La force de rappel d'un ressort lorsque l'on s'écarte de la position d'équilibre est donnée par l'expression suivante : F = - k L ou L est la l'allongement dudit ressort.
Quelle est l'unité de k, constante d'élasticité du ressort dans le système MKSA ?

3.1.3 Loi de Stefan.

Un corps noir émet un rayonnement qui obéit à la loi de Stefan. Cette loi donne la puissance émise P en fonction de la surface S de la température T du corps et de la constante de Stefan σ : $P = \sigma\ S\ T^4$. En déduire l'unité de la constante.

3.1.4 Unités dérivées.

Connaissant les 7 grandeurs internationales :

Grandeurs	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique (intensité)	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Déterminer les unités des grandeurs suivantes :

Grandeurs	Unité	Symbole
Force	Newton	N :
Pression	Pascal	Pa :
Energie	Joule	J :
Puissance	Watt	W :
Charge électrique	Coulomb	C :
Résistance électrique	Ohm	Ω :
Diff. de potentiel	Volt	V :
Densité Champ Magnétique	Tesla	T :
Fréquence	Hertz	Hz :

3.1.5 Produit scalaire et produit vectoriel.

Soient deux vecteurs de coordonnées $\vec{u}(2,3,1)$ et $\vec{v}(1,-1,1)$. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs. En déduire l'angle entre les deux vecteurs. Conclusion. Calculer le produit vectoriel $\vec{u}$ x $\vec{v}$. Si $\vec{v}(8,12,4)$, calculer le produit vectoriel $\vec{u}$ x $\vec{v}$. En déduire l'angle entre les deux vecteurs. Conclusion.

3.1.6 Aire d'un triangle.

Soit un triangle formé par trois points A, B et C. Montrer que l'aire du triangle est égale à la moitié de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs issus du même point.

3.1.7 □ Double produit vectoriel et scalaire.

Vérifier sur un exemple de votre choix que : $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

De la même manière, vérifier que : $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.

3.2 Mécanique du point matériel.

3.2.1 Automobile accélérant.

a) Quelle est l'intensité de l'accélération, supposée uniforme, d'une automobile se déplaçant en ligne droite, dont la vitesse passe de l'intensité $v_1 = 20$ km h^{-1} à l'intensité $v_2 = 30$ km h^{-1} en 1,5 s ?
b) À la même accélération, combien de temps faut-il pour que l'intensité de la vitesse passe de $v_2 = 30$ km h^{-1} à $v_3 = 36$ km h^{-1} ?

3.2.2 Représentation graphique du mouvement.

Un mobile au repos part de l'origine avec une accélération de 2 m/s² qu'il garde pendant 2 s. Ensuite, il garde la vitesse acquise pendant 3 s. Enfin, il est freiné jusqu'à l'arrêt avec une décélération de 1 m/s². Représenter graphiquement la position, la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

3.2.3 Course de 100 m.

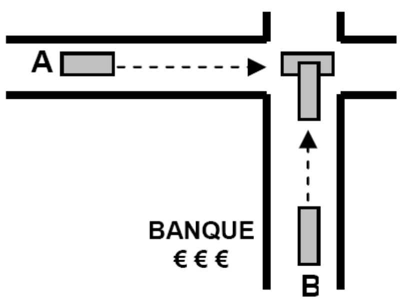
Au départ d'une course de 100m, Pierre accélère pendant 1.8 s pour atteindre une vitesse de 9.5 m/s. Un second athlète, Patrick, accélère durant 2.2 s pour atteindre la vitesse de 9.6 m/s. Ils conservent leur vitesse acquise durant le reste de la course.
Lequel de ces deux athlètes va gagner la course ? Justifiez votre réponse en donnant le temps qui sépare les arrivées des deux athlètes (en secondes et centièmes de seconde).
Quelle distance sépare les deux athlètes lorsque le premier passe la ligne d'arrivée ?

3.2.4 La mouche.

Un homme doit transporter des fruits en camionnette entre deux villes distantes de 90 km. Il roule à vitesse constante égale à 90 km.h^{-1}. Une mouche curieuse (ou plutôt une curieuse mouche) démarre au même moment et du même lieu et effectue sans arrêt l'aller et retour entre la camionnette et la destination finale à la vitesse constante de 120 km.h^{-1}. Quelle distance parcourt la mouche ?

3.2.5 Attaque d'une banque.

La voiture **B** des gangsters qui viennent de dévaliser la banque démarre en trombe. Le scénariste voudrait qu'elle entre en collision de plein fouet avec le véhicule **A** qui roule à la vitesse constante de 80 km/h dans la rue transversale éloignée de 30 m. Lorsque le véhicule **B** démarre, le véhicule **A** se trouve à 80 m du carrefour.
Quelle doit être l'accélération (supposée constante) du véhicule **B** ?



Quelle est la vitesse (exprimée en km/h) du véhicule **B** lors de la collision ?

3.2.6 Chute libre et rencontre.

Un corps tombe d'une hauteur de 800 mètres. Simultanément, un deuxième corps est lancé à partir du sol vers le haut avec une vitesse initiale $v_0 = 200$ m/s.
Après combien de temps et à quelle hauteur les deux corps se rencontrent-ils ?

3.2.7 Vitesse constante sur route.

Quelle est la force nécessaire pour maintenir en mouvement à vitesse constante sur une route en béton horizontale une automobile pesant 1500 kg. L'accélération de pesanteur vaut : 10 m.s^{-2}. On admettra que l'automobile roule trop lentement pour que la résistance de l'air soit appréciable et on prendra $\mu = 0,04$ comment coefficient de frottement.

3.2.8 Malle sur un parquet.

Une force de 200 N est juste suffisante pour mettre en mouvement une malle en acier de 50 kg sur un parquet de bois. Trouver le coefficient de frottement statique.
On place la malle sur un plan incliné, quelle doit être la valeur de l'angle pour que la malle se mette en mouvement.

3.2.9 □ Boule de bowling

Une boule de bowling de vitesse initiale 3 m.s^{-1} roule sur un parquet sur 50 m avant de s'immobiliser. Quel est le coefficient de frottement ?

3.2.10 Equations paramétriques

Par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une particule M est soumise à l'accélération constante $\vec{\gamma} = -9,8\,\vec{k}$ (SI) A l'instant t = 0, elle se trouve au point O et a pour vitesse $\vec{v}_0 = 4\vec{i}$ (SI).

1) Déterminer les équations paramétriques du mouvement : x(t), y(t), z(t).
2) Donner en m.s^{-1} l'expression de $\vec{v}_M(t)$ et calculer la vitesse à t = 0,5 s.

3.2.11 □ Le terrain de Volley

On connaît la position du ballon de volley à trois moments. A l'origine le ballon a une altitude de 2.2 m. A 10 m du lanceur le ballon a une altitude de 2.7 m et finalement il touche le sol à une distance de 18.5 m du joueur.
1. Calculez les composantes verticale et horizontale de la vitesse initiale du ballon.
2. Calculez l'angle avec lequel le ballon est lancé.
3. Quel temps s'écoulera entre le lancer et le contact avec le sol ?

3.2.12 □ Accélération proportionnelle à la vitesse.

Un point effectue un mouvement rectiligne tel que, à chaque instant, son vecteur accélération est opposé à son vecteur vitesse et tel que le module de l'accélération est double de celui de la vitesse. A t = 0, la vitesse est $\vec{v} = 4\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire de la trajectoire.
Calculer, l'expression du vecteur vitesse en fonction du temps t.

3.2.13 Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Un point matériel à l'abscisse x_o et à la vitesse v_o au temps t_o est soumis à une accélération constante γ parallèle à l'axe Ox. Donner les expressions de la vitesse et de l'abscisse à un temps t quelconque. Donner la relation liant v^2 et v_o^2. Qu deviennent les expressions si l'accélération est nulle ?

3.2.14 Equations horaires.

Un point mobile a pour équations horaires, en unités SI :
$x = 2\,t^3 + 4t^2 + 2$
$y = t^2 - 2t + 1$
$z = 2t$.
1) Calculer les vecteurs vitesse et accélération à tout instant t.
2) À quel instant t_0 et en quel point M_0 le mobile se trouve-t-il dans le plan xOz ? Quelle est alors sa vitesse (sens et norme) ?

3.2.15 Equation paramétrique. Trajectoire.

Un mobile ponctuel est animé d'un mouvement plan dont les équations horaires, dans un repère orthonormé Oxy sont les suivantes (t en s, x et y en m) :
$x = 5t + 2$,
$y = -5\,t^2 + 8t$,

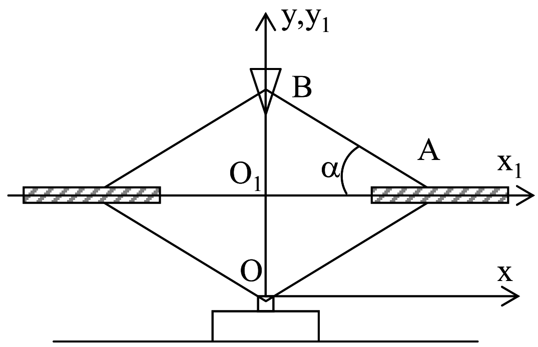
1) Trouver l'équation de la trajectoire.
2) Déterminer les coordonnées et le module du vecteur vitesse à t = 0.

3.2.16 Plus vite que son ombre ?

Un piéton marche la nuit sur un trottoir, en ligne droite, à vitesse constante. La vitesse de l'ombre de sa tête sur l'asphalte diminue-t-elle, augmente-t-elle ou reste-t-elle constante, lorsqu'il s'approche du réverbère responsable de cette ombre ?

3.2.17 □ Cric.

La figure ci-contre représente un cric pour voiture.
Soit $\vec{v}_{A1}$ la vitesse du point A dans le repère O_1,x_1,y_1. Soit $\vec{v}_{B1}$ la vitesse du point B dans le repère O_1,x_1,y_1 et $\vec{v}_B$ la vitesse du point B dans le repère O,x,y.
Calculer l'intensité v_B de $\vec{v}_B$ en fonction de v_{A1} et de l'angle α.
AN : $\alpha = 30°$ et $v_{A1} = 4$ mm.s-1.



3.2.18 Questions.

1) Est-il suffisant quel le vecteur vitesse d'un point soit constant pour que ce point soit en mouvement
   a) rectiligne ?
   b) uniforme ?

2) Un système qui se déforme peut-il être en translation ?

3) Un point se déplace d'un mouvement uniforme. Comment doit être sa trajectoire pour qu'il ait un vecteur vitesse constant ?

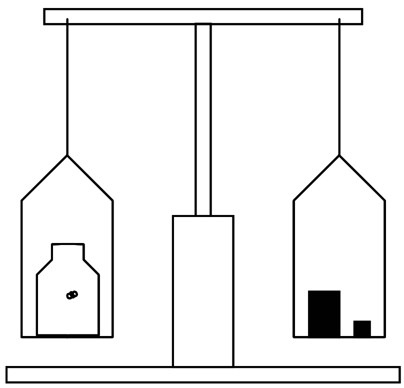
4) Une personne se trouve dans un ascenseur qui est accéléré vers le haut. Qu'indique un pèse-personne ?

5) Lors d'un orage, pourquoi percevons le bruit du tonnerre après avoir vu l'éclair ?

6) Un aérostat se déplace avec le vent en direction du Nord. Dans quelle direction les drapeaux sur sa nacelle se dirigent-ils ?

7) Quel rôle joue la friction lors de la marche des êtres vivants ?

8) □ La mouche dans le bocal.
Un bocal fermé contenant une mouche est placé sur un des plateaux d'une balance équilibrée très sensible. La mouche est posée sur la paroi du bocal. Que se passe-t-il lorsque la mouche quitte sa place et commence à voler dans le bocal ?



Solution :
Cet exercice est paru dans le magazine allemand Umschau. Il devint le sujet de vives discussions auxquelles participèrent de nombreux ingénieurs qui donnèrent de nombreuses solutions pas toujours justes.

3.2.19 Palet glissant sans frottement.

Un palet glisse sans frottement sur de la glace (plan horizontal). Faire un schéma. Définir un repère, un référentiel, identifier les forces auxquelles il est soumis, déterminer l'équation horaire et la trajectoire du palet assimilé à un point matériel de masse m.

3.2.20 □ Echelle.

Une échelle de trois mètres de haut a une masse de 20 kg. On la place contre un mur vertical en lui donnant une pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'appui au sol se fait avec un coefficient de frottement de μ = 0,4. Une personne de 80 kg est placée au deux tiers de la hauteur de l'échelle à partir du sol. On suppose que le coefficient de frottement sur le mur vertical est nul.
1) Quelle est la réaction du sol sur l'échelle en fonction de α. Montrer qu'en l'absence de frottement au sol, l'échelle ne peut tenir avec un angle différent que l'on explicitera. Commentez.

2) Déterminer l'angle α à partir duquel l'équilibre est rompu.

3.2.21 □ □ Trajectoire d'un javelot.

Un javelot de masse m est lancé avec un angle α par rapport à l'horizontale à la vitesse initiale v_o depuis une hauteur h_o.

1) Déterminer la force à laquelle est soumis le javelot. Définir un repère et les conditions initiales.
2) En déduire l'accélération et les expressions des vitesses, des abscisses et de la trajectoire. Quelle est la nature de la trajectoire ? La tracer approximativement.
3) À quelle distance x_d, le javelot touche-t-il le sol ? A quel moment t_d ?
4) Quel est l'angle d'incidence par rapport à l'horizontale du javelot au moment de l'impact ? Quelle relation lie α et β si h_o est nulle ?
5) Déterminer l'équation à résoudre pour évaluer l'angle permettant d'envoyer le javelot le plus loin du lanceur. Résoudre la dite équation dans le cas où la hauteur initiale est nulle.
6) Quelle est la hauteur maximale atteinte ?
7) Quel phénomène physique réel vient fausser les résultats précédents ? On vous donnera ensuite les équations.

Données : m = 2 kg, g = 9,81 $m.s^{-2}$, h_o = 1,60 m, v_o = 20 $m.s^{-1}$, α = 30°.

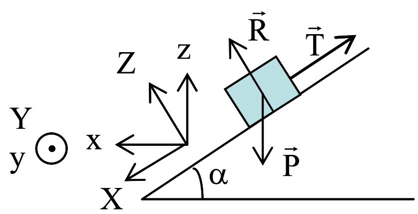
3.2.22 □ □ Balistique: tir au pigeon

A l'instant t = 0, un pigeon en argile est éjecté depuis la position $(x_0,0)$, avec une vitesse $v_2 = (v_2 \cos\alpha_2, v_2 \sin\alpha_2)$ connue. Un tireur est placé en (0,0) avec un fusil tirant de la chevrotine à une vitesse v_1 sous un angle α_1 avec l'horizontale. L'angle α_1 et la vitesse v_1 sont également connus.

A quel temps la personne doit-elle tirer pour atteindre la cible ?
La solution est-elle unique ?

3.2.23 □ Glissement sans frottement sur un plan incliné.

Un objet de masse m glisse sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.



1) Etude statique.
L'objet est soutenu par un câble parallèle au plan incliné. Déterminer la tension du fil ainsi que la réaction du plan incliné.
2) Frottement statique.

Le fil est coupé. Le mobile reste immobile à cause des frottements statiques. Exprimer le coefficient de frottement statique en fonction de α.

3) Etude dynamique

L'objet n'est plus retenu par le câble. Il est lâché avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan XY. Déterminer les équations X(t) et Y(t). En déduire l'équation de la trajectoire.

4) Etude dynamique avec prise en compte des frottements.

Une force de frottement dynamique apparaît lors du déplacement du solide. Elle est modélisée à faible vitesse par l'expression : $\vec{F} = -k\vec{v}$, avec k une constante réelle positive. A l'instant initial, le solide possède une vitesse selon X.

a) Déterminer l'unité de k.

b) Faire un schéma des forces appliquées aux solides. Ecrire le bilan des forces et déterminer les composantes des forces sur les deux axes OX et OZ.

c) En déduire la valeur de la réaction du support. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v_x.

d) Démontrer ou vérifier que $v_x(t)$ peut se mettre sous la forme : $v_x(t) = a\, e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\sin\alpha$.

En déduire a et la vitesse limite v_{lim} que peut atteindre le solide ; en déduire l'expression finale de $v_x(t)$.

e) Par intégration, déterminer l'expression de X(t).

3.2.24 Freinage d'un parachutiste.

Un parachutiste de masse totale m = 100 kg subit lors de sa descente, parachute ouvert, une force de freinage dont le module est donné par l'expression F = 20 v^2 où v est sa vitesse exprimée en m s^{-1}.

Déterminer la vitesse limite atteinte par le parachutiste (g = 9,81 m s^{-2}).

3.2.25 Serrage d'écrou.

On doit serrer les écrous de tête de bielle d'une voiture à 4,5 m.N. Quelle force minimale doit-on exercer à l'extrémité d'une clé dont le bras a une longueur de 1 m ? Quelle force doit-on exercer si on l'applique avec un angle de 30° par rapport à la clé ?

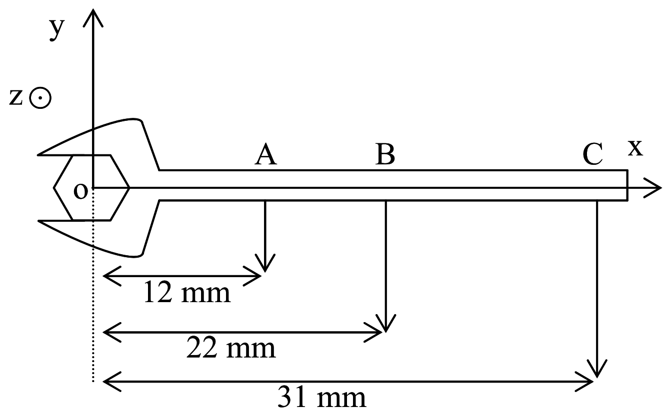
3.2.26 Balance en équilibre.

Un balance possède deux bras de longueur l_1 = 10 cm et l_2 = 32 cm.

Quelle masse faut-il placer sur le plateau 1 de la balance pour équilibrer une masse de 125 g sur le plateau 2 ?

3.2.27 Clé plate.

Application d'un effort de serrage sur une clé plate :

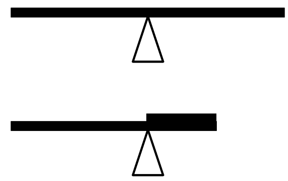


Soient trois forces $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ appliquées aux points A, B et C et de norme : $\|\vec{A}\| = 60\text{N}, \|\vec{B}\| = 40\text{N}, \|\vec{C}\| = 50\text{N}.$

1) Déterminer dans le repère R(O,x,y,z), les coordonnées des vecteurs forces.
2) Déterminer dans le repère R(O,x,y,z), les coordonnées des vecteurs moments par rapport au point O. Déterminer la norme de chacun de ces vecteurs moments.
3) a) Pour obtenir le meilleur serrage, laquelle des forces faut-il appliquer ?
b) Si vous aviez le choix de la force et de la position, laquelle choisiriez vous et où l'appliqueriez vous ? Déterminer le vecteur moment correspondant.

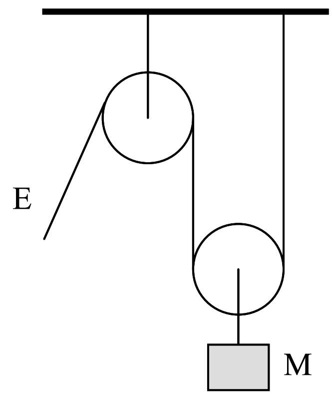
3.2.28 Le bâton plié sur le pivot.

Un bâton homogène est en équilibre sur un pivot s'il y est placé en son milieu. Que se passe-t-il quand on plie la moitié droite du bâton ? L'équilibre est-il encore possible ?
Sinon, quelle est la nouvelle position d'équilibre ?



3.2.29 Poulies et traction.

Les poulies représentées ci-contre sont mobiles sans frottement.
1) Quelle force faut-il exercer à l'extrémité E de la corde pour maintenir la masse M = 5 kg en équilibre ?
2) Quel travail faut-il effectuer pour soulever la masse de 0,5 m ? Quelle longueur de corde est tirée ?
3) Connaissez vous le principe du palan ?



3.2.30 Calcul d'énergie cinétique.

Calculer l'énergie cinétique d'une automobile de masse 1200 kg, en mouvement de translation rectiligne à la vitesse de 72 km h^{-1}. Calculer l'énergie cinétique pour une vitesse double.

3.2.31 Énergie potentielle du ressort.

Un ressort s'allonge de 1 cm sous l'action d'une force de 1 N. Déterminer l'énergie potentielle de déformation qu'il acquiert lorsqu'on l'allonge de 10 cm (on supposera le ressort parfait).
On rappelle que la force exercée par un ressort est proportionnelle à son allongement et vérifie la relation : $\vec{F} = -k\vec{x}$ où $\vec{x}$ représente le vecteur allongement.

3.2.32 Attention au train.

Un train de masse M = 400 tonnes se déplace sur une voie rectiligne à la vitesse v = 100 km.h^{-1}.

a) Calculer l'énergie cinétique du train.
b) Si cette énergie était utilisée pour soulever le train, quelle hauteur h atteindrait-on ?

Donnée : g = 9,8 m s^{-2}.

3.2.33 Energie nécessaire de poussée.

Une force de 300 N est utilisée pour pousser sur 3 m une caisse pesant 75 kg (g = 10 m.s^{-2}) sur le sol horizontal d'un entrepôt.
Quel est le travail effectué ?
Quelle est la variation d'énergie potentielle de la caisse ?
Quel est le coefficient de frottement ?

3.2.34 Puissance de montée.

Un homme pesant 75 kg grimpe un escalier haut de 3 m en 5 s. Trouver la puissance minimum dépensée. Trouver l'énergie correspondante. Sur une canette de soda d'une marque très célèbre est indiquée la quantité d'énergie assimilable par l'organisme : 180 kJ. Quelle hauteur doit monter l'homme pour « dépenser » cette énergie.

3.2.35 Bateau à moteur.

Un bateau à moteur nécessite 80 ch pour se déplacer à la vitesse constante de 10 km/h. Quelle est la force de résistance de l'eau sur le bateau à cette vitesse ?
Donnée : 1 ch = 746 W.

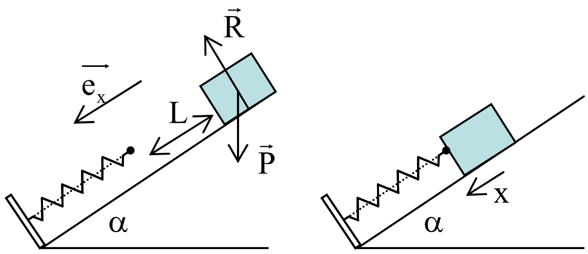
3.2.36 □ □ Ressort horizontal et vertical.

1) Un ressort de raideur k, de longueur à vide l_o. Un point matériel M de masse m est accroché à une extrémité tandis que l'autre est fixe. On allonge le ressort sur un axe horizontal jusqu'à une longueur l_m et on le lâche. L'allongement maximal est x_m. On notera $x = l-l_o$.
a) Faire un schéma détaillé du montage en indiquant les longueurs l et l_o, la position correspondant à l'allongement maximal et à une position quelconque, la raideur k, la masse m de M. Indiquer les forces appliquées à la masse.
b) Calculer le travail de chaque force pour l'allongement x.
c) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire une équation. Identifier l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.
d) Déterminer la vitesse maximale du point M.
e) En dérivant par rapport au temps l'équation trouvée en c), déterminer l'équation différentielle vérifiée par x. Montrer que l'équation horaire x(t) satisfaite par le point matériel est de la forme $x(t) = a\cos(\omega t+\phi)$. Identifier les termes a, ω et ϕ. Déterminer la période et la fréquence des oscillations.
f) Montrer que l'on peut obtenir rapidement l'équation différentielle vérifiée par x en appliquant le Principe Fondamental de la dynamique.

2) On retourne le ressort sur l'axe vertical, masse vers le bas. Il est lâché sans vitesse initiale d'un allongement x_m par rapport à la position du ressort à vide.
a) Faire un schéma du ressort à vide, à l'équilibre en présence de la masse, en mouvement et lors de l'allongement maximal en indiquant la longueur à vide l_o, l_e et x_e la longueur et l'allongement à l'équilibre, l et x la longueur et l'allongement quelconque et l_m et x_m la longueur et l'allongement maximal.
b) On considère la position à l'équilibre. A partir du PFD, déterminer l_e en fonction de m, g k et l_o.
c) Appliquer le PFD lorsque la masse est en mouvement. Déterminer l'équation horaire x(t). On pourra introduire $x = x_e + X$.

3.2.37 □ Plan incliné et ressort.

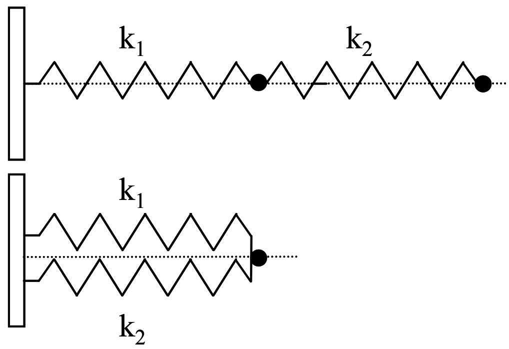
Un point matériel M de masse m est lâché sans vitesse initiale sur un plan incliné sans frottement à une distance L d'un ressort de raideur k. L'angle du plan incliné avec l'horizontal est α.
1) Identifier les forces.
2) Calculer les travaux des forces.
3) En appliquant le Théorème de l'Energie cinétique, déterminer l'allongement maximal du ressort.
4) Calculer la vitesse maximale.



3.2.38 □ □ Groupement série et parallèle de deux ressorts.

Soient deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2.

Déterminer la constante de raideur équivalente k à l'association de ces deux ressorts en parallèle et en série.



3.2.39 □ Rebond d'une balle. Un paradoxe classique.

On lâche une balle sans vitesse initiale d'une hauteur h sur un sol plan. Le coefficient de restitution est e <1.
1) À quelle hauteur la balle remonte au $n^{\text{ième}}$ rebond ?
2) Quel est le nombre théorique total de rebonds ? Quelle est leur durée totale ?
3) Quel est le paradoxe ainsi évoqué ? Comment lever le paradoxe ?

4 Solutions.

4.1 Notions fondamentales.

4.1.1 Unité de G.

$[G] = m^3.s^{-2}.kg^{-1}$.

4.1.2 Unité de la constante de raideur d'un ressort.

$[k] = kg.s^{-2}$.

4.1.3 Loi de Stefan.

$[\sigma] = [P]\,[S]^{-1}\,[T]^{-4} = W.m^{-2}.K^{-4} = kg.s^{-3}.K^{-4}$.

4.1.4 Unités dérivées.

Grandeurs	Unité	Symbole
Force	Newton	N : $m.kg.s^{-2}$
Pression	Pascal	Pa : $m^{-1}.kg.s^{-2}$
Energie	Joule	J : $m^2.kg.s^{-2}$
Puissance	Watt	W : $m^2.kg.s^{-3}$
Charge électrique	Coulomb	C : s.A
Résistance électrique	Ohm	Ω : $m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
Diff. de potentiel	Volt	V : $m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Densité Champ Magnétique	Tesla	T : $kg.s^{-2}.A^{-1}$
Fréquence	Hertz	Hz : s^{-1}

4.1.5 Produit scalaire et produit vectoriel.

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + 1 \times 1 = 0 = u\,v\cos\phi$ ce qui implique que $\cos\phi = 0$ et donc $\phi = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix} \times \vec{v}\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3+1\\1-2\\-2-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4\\-1\\-5\end{vmatrix}.$$

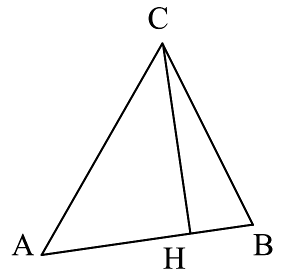
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}\begin{vmatrix}2\\3\\1\end{vmatrix} \times \vec{v}\begin{vmatrix}8\\12\\4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3\times4-12\\8-2\times4\\2\times12-3\times8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} = \vec{0},\ \left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = uv\sin\phi = 0 \rightarrow \sin\phi = 0 \rightarrow \phi = 0.$$

4.1.6 Aire d'un triangle.

L'aire du triangle est égale à la somme des produits de AH par HC et de HB par HC, le tout divisé par deux.
Aire = (AH HC + HB HC)/2 = AB HC / 2.

$$\left.\begin{array}{l}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\| = AC\ AB\ \sin\left(\widehat{BAC}\right)\\ \sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{HC}{AC}\end{array}\right\}\rightarrow HC = \frac{\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{AB}.$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|.$$



4.1.7 □ Double produit vectoriel et scalaire.

4.2 Mécanique du point matériel.

4.2.1 Automobile accélérant.

a) L'accélération est uniforme donc $\vec{\gamma} = \overrightarrow{cte}$, l'automobile se déplace en ligne droite donc on peut projeter la relation sur un axe et γ = cte. Or $\gamma = \frac{dv}{dt} \to dv = \gamma\ dt$, il ne reste qu'à intégrer : $\int dv = \int \gamma\ dt = \gamma \int dt$ qui donne : $v + A = \gamma t + B \to v = \gamma t + C$. Reste à déterminer la constante C, pour cela on utilise les conditions indiquées dans le texte. À t = 0, $v = v_1 = C$ et à $t_{12} = 1.5$s, $v = v_2$, on a donc $v_2 = v_1 + \gamma\ t_{12}$ qui donne $\gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_{12}}$ =1,85 m.s^{-2}.

b) L'accélération étant constante : $\gamma = \frac{v_3 - v_2}{t_{23}} \to t_{23} = \frac{v_3 - v_2}{\gamma} = 0{,}9$ s.

4.2.2 Représentation graphique du mouvement.

Entre t = 0 et $t = t_1 = 2$s, γ = 2 m/s².
γ = dv/dt => v = γt = 2 t.
dx/dt = 2t => x = ½ γ t² = t².
à $t = t_1$, $x_1 = 4$m et $v_1 = 4$ m.s^{-1}.

Entre $t = t_1$ et $t = t_2 = 5$s, γ = 0 m/s².
γ = dv/dt => v = cte = $v_2 = 4$ m.s^{-1}.
dx/dt = 4 => $x = x_1 + v_2\ (t - t_1)$
à $t = t_2$, $x_2 = 16$ m et $v_2 = 4$ m.s^{-1}.

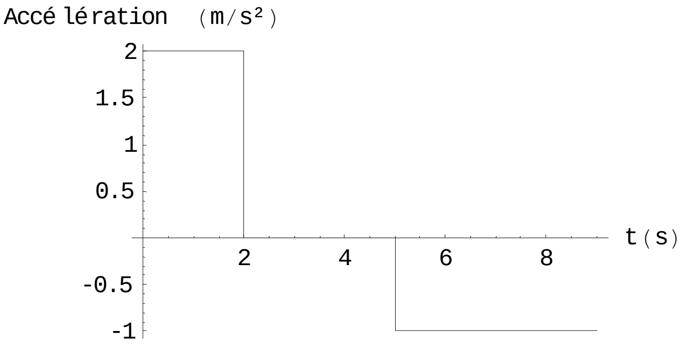
Pour $t > t_2 = 5$s, γ = -1 m/s².

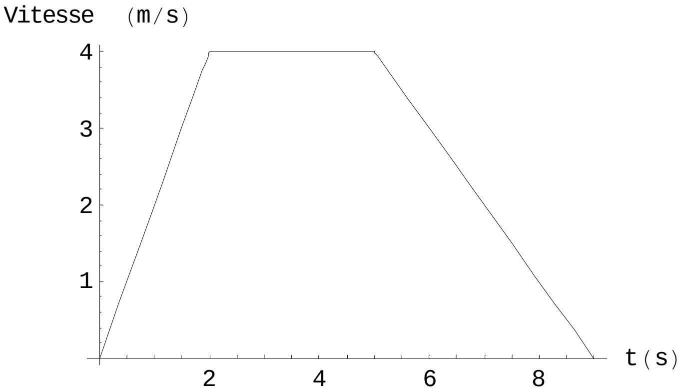
γ = dv/dt. $\frac{dv}{dt} = \gamma \Rightarrow \int_{v_2}^{v} dv' = \int_{t_2}^{t} \gamma dt' \Leftrightarrow v - v_2 = \gamma(t - t_2) \Leftrightarrow v(t) = v_2 + \gamma(t - t_2)$

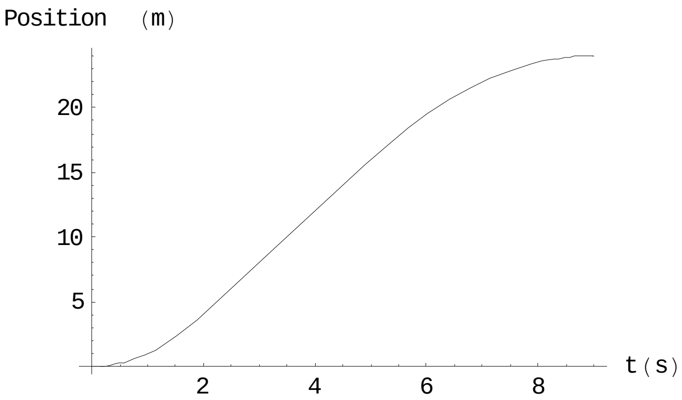
$$\frac{dx}{dt} = v_2 + \gamma(t - t_2) \Rightarrow \int_{x_2}^{x} dx' = \int_{t_2}^{t} \left(v_2 + \gamma(t' - t_2)\right)dt'$$

$$x(t) = x_2 + (v_2 - \gamma t_2)(t - t_2) + \frac{1}{2}\gamma\left(t^2 - t_2^2\right).$$

v = 0 pour $t_3 = 9$ s.
$x(t_3) = 24$ m.







4.2.3 Course de 100 m.

Pierre, coureur 1. $t_1 = 1.8$ s, $v_1(t_1) = 9.5$ m.s^{-1}.
Patrick, coureur 2, $t_2 = 2.2$ s, $v_2(t_2) = 9.6$ m.s^{-1}.

1. Pierre :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^{v_1} dv = \int_0^{t_1} adt \Rightarrow a = \frac{v_1}{t_1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^{v} dv = \int_0^{t} \frac{v_1}{t_1} dt \Rightarrow v = \frac{v_1}{t_1} t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_1}{t_1} t \Rightarrow \int_0^{x_1} dx = \int_0^{t_1} \frac{v_1}{t_1} tdt \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 = 8.55\text{m}.$$

Il lui reste à parcourir d = 100 – 8.55 m à la vitesse constante v_1 en un temps $t_{11} = d/v_1$ = 9.62 s.
Le temps de la course est donc : $T = t_1 + t_{11}$ = 11.43 s.

2. Patrick :

Les mêmes calculs mènent à : T = 11.52 s. Pierre gagne la course avec 0.09 s d'avance à l'arrivée. Quand Pierre franchit la ligne, Patrick est en position :
$x(T_{Pierre}) = x_2 + v_2\,(T_{Pierre} - t_2)$ = 99.13 m. Il est donc 87 cm derrière la ligne.

4.2.4 La mouche.

120 km.

4.2.5 Attaque d'une banque.

On pose l'origine en B. On a donc :
v_A = 80 km/h, x_{0A} = -80 m, y_{0A} = 30 m.
$v_{0B} = 0$, $x_{0B} = 0$, $y_{0B} = 0$.

$$v_A = \frac{dx_A}{dt} \rightarrow dx_A = v_A dt \rightarrow \int_{x_{0A}}^{x} dx_A = \int_0^t v_A dt' \Leftrightarrow x_A(t) = x_{0A} + v_A t$$

$$\gamma_B = \frac{dv_B}{dt} \rightarrow dv_B = \gamma_B dt \rightarrow \int_0^{v_B} dv'_B = \int_0^t \gamma_B dt' \Leftrightarrow v_B(t) = \gamma_B t$$

$$v_B(t) = \frac{dy_B}{dt} \rightarrow dy_B = v_B dt = \gamma_B t dt \rightarrow \int_0^{y_B} dy'_B = \int_0^t \gamma_B t' dt' \Leftrightarrow y_B(t) = \frac{1}{2}\gamma_B t^2$$

A l'impact : $\begin{cases} x_A(t_I) = x_{0B} = 0 \\ y_{0A} = y_B(t_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_I = -\dfrac{x_{0A}}{v_A} \\ \gamma_B = \dfrac{2y_{0A}}{t_I^2} = \dfrac{2y_{0A}}{x_{0A}^2} v_A^2 = 0{,}6 \text{ km.h}^{-2}. \end{cases}$

4.2.6 Chute libre et rencontre.

Corps A : h_A = 800 m. Il est soumis à son poids.
Corps B : v_0 = 200 m/s. Il est soumis à son poids.

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \gamma = -g = \frac{dv_A}{dt} \rightarrow v_A(t) = -gt = \frac{dy_A}{dt} \Rightarrow dy_A = -gtdt$$

$$\int_{h_A}^{y_A} dy'_A = -\int_0^t gt'dt' \Leftrightarrow y_A(t) = h_A - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\gamma = -g = \frac{dv_B}{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v_B} dv'_B = -\int_0^t gdt' \Leftrightarrow v_B(t) = v_0 - gt = \frac{dy_B}{dt} \Rightarrow dy_B = (v_0 - gt)dt$$

$$\int_0^{y_B} dy'_B = \int_0^t (v_0 - gt')dt' \Leftrightarrow y_B(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

A la rencontre : $y_A(t_I) = h_A - \frac{1}{2}gt_I^2 = y_B(t_I) = v_0 t_I - \frac{1}{2}gt_I^2$ d'où : $t_I = \frac{h_A}{v_0} = 4$ s. y_I = 720 m.

4.2.7 Vitesse constante sur route.

La force normale est le poids de l'automobile. L'accélération de pesanteur est g = 10 m.s^{-2}.
Le poids est égale à : P = mg = 1500 x 10 = 15 000 N.
F = µN = 0,04 x 15000 = 600 N.

4.2.8 Malle sur un parquet.

La force normale est le poids de la malle.
$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{200}{50x10} = 0,4.$
Sur le plan incliné, l'angle est donné par la relation : tan a = F_f/ N = µ. Pensez à tracer les vecteurs dans un triangle…

4.2.9 □ Boule de bowling

On suppose un mouvement rectiligne accéléré. $\gamma = \frac{dv}{dt} \to dv = \gamma dt \to v = \gamma t + v_i$.
$v = \frac{dx}{dt} \to dx = vdt \to x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_i t + x_i$. La combinaison des deux équations, en éliminant $t = \frac{v - v_i}{\gamma}$, donne : $x - x_i = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{v - v_i}{\gamma}\right)^2 + v_i \frac{v - v_i}{\gamma} \to v^2 - v_i^2 = 2\gamma\left(x - x_i\right)$.
On en déduit : γ = - 0.09 m.s^{-2}.
La force normale est le poids et donc : F_f = µ mg.
D'après le principe de la dynamique, sur l'axe du mouvement, seule la force de frottement agit et donc : F_f = µ mg = mγ => $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{0,09}{9,81} = 9,2\ 10^{-3}$.

4.2.10 Equations paramétriques

1) x(t) = v0 t = 4 t ; y(t) = 0 ; z(t) = -1/2 γ t^2 = -4,9 t^2.
2) $\vec{v}_M\left(t\right) = 4\vec{i} - 9,8\ t\ \vec{k}$
A t = 0,5, $\vec{v}_M\left(0,5\right) = 4\vec{i} - 4,9\ \vec{k} \to v_M\left(0,5\right) = \sqrt{4^2 + \left(-4,9\right)^2} = 6,33$ m.s^{-1}.

4.2.11 Terrain de volley.

1. Le système considéré est le ballon.
Le ballon est soumis à une seule force, son poids.
Le PFD donne : $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{\gamma}$
Les conditions initiales sont :
A t = 0, z = z_0 = 2.2 m, $v_x(0) = v_{x0}$, $v_z(0) = v_{z0}$.
En x_1 = 10 m, z_1 = 2.7 m.
En x_F = 18.5 m, z_F = 0 m.

On pose un repère xOz et l'on projette la relation vectorielle sur les deux axes. On intègre sur le temps :

$$\begin{cases}\gamma_x = 0 \\ \gamma_z = -g\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_x(t) = cte = v_{x0} \\ v_z(t) = -gt + v_{z0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x(t) = v_{x0}t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0\end{cases}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient directement :

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{x0}^2} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x + z_0.$$

On doit donc résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases}z_1 = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x_1^2}{v_{x0}^2} + \dfrac{v_{z0}}{v_{x0}}x_1 + z_0. \\ 0 = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x_F^2}{v_{x0}^2} + \dfrac{v_{z0}}{v_{x0}}x_F + z_0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}v_{z0} = \dfrac{1}{2}g\dfrac{x_F}{v_{x0}} - z_0\dfrac{v_{x0}}{x_F} \\ v_{x0}^2 = \dfrac{1}{2}gx_1x_F\dfrac{x_F - x_1}{x_Fz_1 - x_Fz_0 - x_1z_0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_{x0} = 15.7\ \text{m.s}^{-1}. \\ v_{z0} = 3.9\ \text{m.s}^{-1}.\end{cases}$$

2. Tan $\alpha = v_{z0} / v_{x0}$ donne $\alpha = 14°$.

3. Cela revient à déterminer la solution de l'équation : $z(t_F) = -\frac{1}{2}gt_F^2 + v_{z0}t_F + z_0 = 0$.

$$t_F = \frac{v_{z0}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{z0}}{g}\right)^2 + 2\frac{z_0}{g}} = 1.17\ \text{s}.$$

Une autre solution plus astucieuse consiste à utiliser la relation :
$x(t) = v_{x0}t$ appliquée en x_F connaissant l'expression de v_{x0}. On a donc :

$$t_F = \frac{x_F}{\sqrt{\dfrac{1}{2}gx_1x_F\dfrac{x_F - x_1}{x_Fz_1 - x_Fz_0 - x_1z_0}}}.$$

4.2.12 □ Accélération proportionnelle à la vitesse.

$\vec{\gamma} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{v}$, on cherche une fonction qui dérivée donne elle-même à une constante près. La fonction exponentielle répond à cette condition ; on cherche le vecteur vitesse sous la forme : $\vec{v} = b\ e^{at}\vec{w}$, on obtient par substitution : $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = ba\ e^{at}\vec{w} = -2b\ e^{at}\vec{w}$ d'où l'on tire : $\vec{v} = b\ e^{-2t}\vec{w}$. En tenant compte de la condition initiale : à t = 0, $\vec{v} = 4\vec{u} = b\ \vec{w} \rightarrow b = 4, \vec{w} = \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = 4\ e^{-2t}\vec{u}$.

4.2.13 Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

$v = v_o + \gamma\ (t-t_o)$.
$x = \frac{1}{2}\gamma\ (t-t_o)^2 + v_o\ (t-t_o) + x_o$.

$(t-t_o) = (v - v_o)/\gamma$ injecté dans l'expression de $x - x_o$. On trouve : $v^2 - v_o^2 = 2\gamma(x - x_o)$.

si $\gamma = 0$, $v = v_o$ et $x = v_o(t-t_o) + x_o$.

4.2.14 Equations horaires.

1) $\vec{v} = \begin{vmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6t^2+8t \\ 2t-2 \\ 2 \end{vmatrix}, \vec{a} = \begin{vmatrix} dv_x/dt \\ dv_y/dt \\ dv_z/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12t+8 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}.$

2) En xOz, y = 0. Il faut résoudre $t^2 - 2t + 1 = 0 = (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$. Dans ce cas :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 14 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \to v = \sqrt{14^2+2^2} = 10\sqrt{2}.$$

4.2.15 Equation paramétrique. Trajectoire.

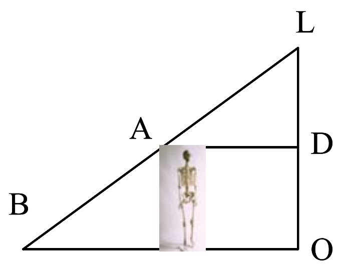
1) $t = \dfrac{x-2}{5} \to y = -0,2x^2 + 2,4x - 4.$

2) $\vec{v}(t)\begin{vmatrix} 5 \\ -10t+8 \end{vmatrix} \to \vec{v}(0)\begin{vmatrix} 5 \\ 8 \end{vmatrix} \to v(0) = \sqrt{5^2+8^2} = 9,43.$

4.2.16 Plus vite que son ombre ?

$\dfrac{LD}{AD} = \dfrac{LO}{OB}$ donc : $AD = OB\dfrac{LD}{LO}$. LD et LO sont fixes, par conséquent :

$v_A = v_B\dfrac{LD}{LO}$. La vitesse de l'ombre est constante



4.2.17 □ Cric.

$\vec{v}_B = \dfrac{d\left(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B}\right)}{dt}$ or $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{O_1B}$ d'où : $\vec{v}_B = 2\,\vec{v}_{B1}$.

La longueur AB est constante, on utilise cette propriété :

$O_1B^2 + O_1A^2 = AB^2 \to 2O_1B\dfrac{dO_1B}{dt} + 2O_1A\dfrac{dO_1A}{dt} = 0$, or $\tan\alpha = \dfrac{O_1B}{O_1A}$ et donc :

$\dfrac{dO_1B}{dt} + \dfrac{1}{\tan\alpha}\dfrac{dO_1A}{dt} = 0$ et finalement : $v_{B1} = \dfrac{1}{\tan\alpha}v_{A1} \Rightarrow v_B = \dfrac{2}{\tan\alpha}v_{A1}$.

4.2.18 Questions.

1) Est-il suffisant quel le vecteur vitesse d'un point soit constant pour que ce point soit en mouvement

c) rectiligne ?
d) uniforme ?

Solution :
$\vec{v} = \overrightarrow{cte}$ implique que le vecteur vitesse a une direction, un sens et une norme constante donc oui aux deux questions.

2) Un système qui se déforme peut-il être en translation ?

Solution :
Non, la position finale de tous les points du système doit pouvoir se déduire de leur position initiale par translation or la translation conserve les distances.

4) Un point se déplace d'un mouvement uniforme. Comment doit être sa trajectoire pour qu'il ait un vecteur vitesse constant ?

Solution :
Un vecteur vitesse constant signifie une direction et un sens constant. Comme le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire, cela signifie que la trajectoire est nécessairement une droite.

5) Une personne se trouve dans un ascenseur qui est accéléré vers le haut. Qu'indique un pèse-personne ?

Solution :
Il indique le poids plus la masse de la personne multipliée par l'accélération, le tout normé par l'accélération de la pesanteur. La personne voit donc sa masse augmentée.

6) Lors d'un orage, pourquoi percevons le bruit du tonnerre après avoir vu l'éclair ?

Solution :
La vitesse du son est très inférieure à celle de la vitesse de la lumière.

7) Un aérostat se déplace avec le vent en direction du Nord. Dans quelle direction les drapeaux sur sa nacelle se dirigent-ils ?

Solution :
L'aérostat se déplace avec le courant d'air. Sa vitesse est donc nulle par rapport à l'air qui l'entoure. Les drapeaux pendent donc verticalement.

8) Quel rôle joue la friction lors de la marche des êtres vivants ?

Solution :
Lorsque l'on marche, on ne peut porter une jambe en avant que si le reste du corps va en arrière. Sur une surface glissante, il ne se passe rien (vous avez pu constater comme il est difficile d'avancer en marchant sur de la glace). Mais quand la friction s'avère suffisante, le recul du corps ne se produit pas et le centre de masse du corps se trouve projeté en avant. Le pas est fait. La friction qui est une force de frottement crée le mouvement !

9) □ La mouche dans le bocal.

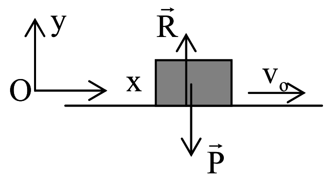
La solution est la suivante :

- Soit la mouche vole horizontalement, à la même hauteur que son point de départ sur la paroi. Elle appuie avec ses ailes sur l'air avec une force égale à sa masse. Cette pression est transmise au fond du bocal comme si elle était toujours sur la paroi. En conséquence, la balance ne bouge pas.
- Soit elle bouge vers le haut ou le bas, c'est-à-dire qu'elle change d'altitude. Dans ce cas, la balance oscille faiblement vers le haut ou le bas suivant le déplacement de la mouche.

Précisons ce dernier point : Imaginons tout d'abord que le bocal fermé contenant la mouche se trouve quelque part dans l'espace. Que se passe-t-il quand la mouche bouge ? Le système {bocal + mouche} forme un système isolé. Si une force intérieure quelconque déplace la mouche vers le haut, le centre de masse du système ne conserve sa position que si le bocal se déplace vers le bas. Ainsi, si la mouche monte, le plateau va descendre.

Il faut ajouter que le vol de la mouche, vers le bas ou le haut, est supposé accéléré. Un vol à vitesse constante ne provoque aucun changement dans la valeur de la pression du bocal et par conséquent aucun mouvement du plateau.

4.2.19 Palet glissant sans frottement.



On définit un repère d'origine O et d'axes Ox et Oy, à t = 0, le point est en x = 0 et y = 0.

Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$ dirigé verticalement vers le bas et à la réaction du sol $\vec{R}$ dirigée elle vers le haut. Le solide ne s'enfonce pas dans le sol et ne se soulève pas de celui-ci, d'après le principe de l'action est de la réaction les deux forces se compensent. Aucune force n'agit sur l'axe Ox, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}$.

On projette la relation sur Oy : $\gamma_y = 0$, $-P + R = 0 \Rightarrow P = R$. $v_y = 0$, $y = 0$.

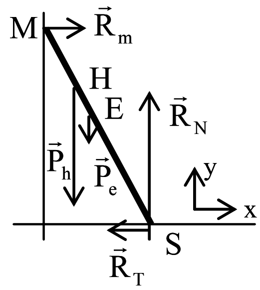
On projette la relation sur Ox : $\gamma_x = 0$. On retrouve bien qu'à l'équilibre, l'accélération est nulle.

On intègre l'accélération pour obtenir la vitesse : $v_x = v_o$.

On intègre la vitesse pour obtenir l'équation horaire : $x = v_o\, t$.

La trajectoire est une droite.

4.2.20 □ Echelle.



1) Le système est l'échelle. Les forces appliquées sur l'échelle sont : $\vec{R}_N$, la réaction normale du sol, $\vec{R}_T$ la réaction tangentielle du sol due aux frottements statiques, $\vec{R}_m$ la réaction du mur, $\vec{P}_e$ le poids de l'échelle dont le point d'application est le centre de gravité de l'échelle, $\vec{P}_h$ le poids de l'homme. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{R}_m + \vec{P}_e + \vec{P}_h = \vec{0}$ qui donne deux relations :

$R_m = R_T$

$R_N - P_h - P_e = 0$

Ces deux relations ne sont pas suffisantes pour déterminer l'ensemble des forces. On applique le principe fondamental de la dynamique aux moments des forces, le point d'application est le point S.
$\overrightarrow{SM} \wedge \vec{R}_m + \overrightarrow{SE} \wedge \vec{P}_e + \overrightarrow{SH} \wedge \vec{P}_h = \vec{0}$.
En développant : $-SM\ R_m \sin\left(\overrightarrow{SM}, \vec{R}_m\right) + SE\ P_e \sin\left(\overrightarrow{SE}, \vec{P}_e\right) + SH\ P_h \sin\left(\overrightarrow{SH}, \vec{P}_h\right) = 0$

$$-R_m \sin(\pi - \alpha) + \frac{1}{2} P_e \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3} P_h \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$-R_m \sin(\alpha) + \left(\frac{1}{2} P_e + \frac{2}{3} P_h\right) \cos(\alpha) = 0.$$

On a donc trois relations :
$R_m = R_T$
$R_N - P_h - P_e = 0$

$$-R_m \sin(\alpha) + \left(\frac{1}{2} P_e + \frac{2}{3} P_h\right) \cos(\alpha) = 0.$$

On en déduit : $R_T = \left(\frac{1}{2} P_e + \frac{2}{3} P_h\right) \cot g(\alpha)$.

En l'absence de frottement, $R_T = 0$ implique que $\alpha = \pi/2$ ce qui se traduit par le fait que l'échelle tient en équilibre verticalement. Il s'agit d'un équilibre instable…

2) L'angle limite est celui pour lequel la réaction tangentielle R_T est égale à $R_T = \mu\ R_N$. En remplaçant par l'expression de R_N, on trouve l'angle limite :

$\mu(P_e + P_h) = \left(\frac{1}{2} P_e + \frac{2}{3} P_h\right) \cot g(\alpha)$, d'où $\cot g(\alpha) = \dfrac{\mu(P_e + P_h)}{\frac{1}{2} P_e + \frac{2}{3} P_h}$ et finalement :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} P_e + \frac{2}{3} P_h}{\mu(P_e + P_h)}\right) = 57.72°.$$

4.2.21 □ □ Trajectoire d'un javelot.

1) Le javelot est soumis à son propre poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
L'origine du repère est le pied du lanceur. On se place dans le plan 0xz ; $\vec{g} = -g\ \vec{e}_z$.
Les conditions initiales sont les suivantes :
Positions : $x(0) = 0$, $z(0) = h_o$
vitesses : $v_x(0) = v_o \cos\alpha$, $v_z(0) = v_o \sin\alpha$.

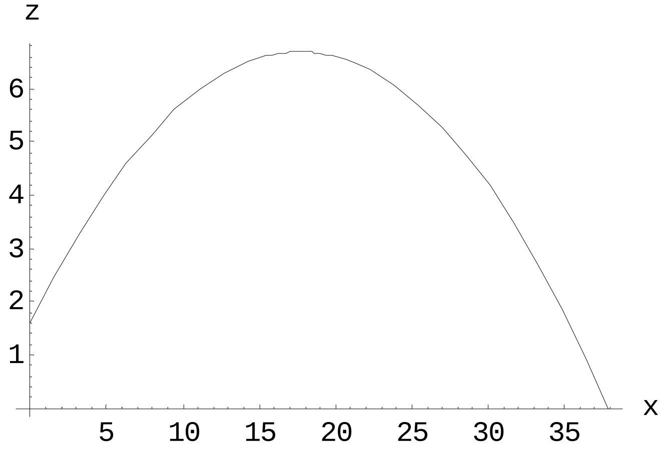
2) D'après le PFD, $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}$, soit $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{\gamma}$ d'où $\vec{\gamma} = \vec{g}$. On projette la relation vectorielle sur les deux axes Ox et Oz. $\begin{cases} \gamma_x = 0 \\ \gamma_z = -g \end{cases}$.

On intègre entre 0 et t et obtient, en tenant compte des conditions initiales :
$v_x(t) = v_o \cos\alpha$.

$v_z(t) = v_o \sin\alpha - gt$.

On intègre une fois de plus :
$x(t) = v_o\, t \cos\alpha$
$z(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_o\, t \sin\alpha + h_o$.

En isolant t, on obtient l'équation de la trajectoire : $z = -\frac{1}{2} g /(v_o^2 \cos^2\alpha)\, x^2 + x \tan\alpha + ho$.
C'est l'équation d'une parabole, l'allure de celle-ci est :



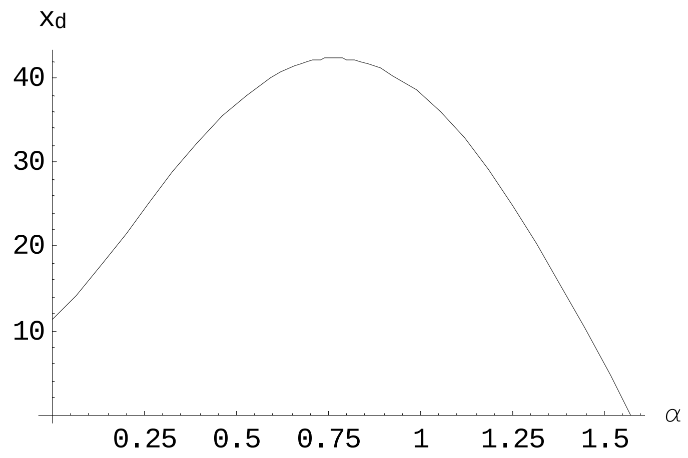
3) Le javelot touche le sol lorsque z = 0, au temps : $t_d = \frac{v_o \sin\alpha}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h_o g}{v_O^2 \sin^2\alpha}}\right)$, il lui correspond l'abscisse : $x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2h_0 g}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right)$.

4) Il faut déterminer les deux vitesses sur les axes au temps t_d. On a :

$$\begin{cases} v_x(t_d) = v_0 \cos\alpha \\ v_z(t_d) = -v_0 \sin\alpha \sqrt{1+\frac{2h_o g}{v_O^2 \sin^2\alpha}}. \end{cases}$$

On en déduit l'angle β : $\tan\beta = -\tan\alpha\sqrt{1+\frac{2h_o g}{v_O^2 \sin^2\alpha}}$. Si la hauteur initiale est nulle alors les deux angles vérifient la relation : $\tan\beta = -\tan\alpha$ et donc dans ce cas, on a : $\beta = \pi - \alpha$.

5) Si l'on trace l'évolution de la distance maximale en fonction de l'angle d'incidence, on obtient une courbe de type :



L'équation à résoudre est simplement $\frac{dx_d}{d\alpha}=0$ et vérifier que la valeur obtenue correspond à un maximum de x_d. Dans le cas particulier où h_o est nulle et avec α compris en 0 et $\pi/2$:

$\alpha = \pi/4$.

Dans le cas contraire, la dérivée de x_d est, pour tout α compris entre 0 et $\pi/2$. :

$$\frac{-2\,g\,ho + vo^2\,Cos[2\,\alpha]\left(1+\sqrt{1+\frac{2\,g\,ho\,Csc[\alpha]^2}{vo^2}}\right)}{g\sqrt{1+\frac{2\,g\,ho\,Csc[\alpha]^2}{vo^2}}}$$

Elle est positive pour $\alpha_{max} \le \arcsin\sqrt{\frac{v_0^2}{2\left(v_0^2+g\,h_0\right)}}$ et négative au dessus. Par conséquent x_d est maximal pour α_{max}. La valeur correspondante est alors :

$$x_{d\,max} = \frac{v_0^2+g\,h_0}{g}\sqrt{1-\left(\frac{g\,h_0}{g\,h_0+v_0^2}\right)^2}.$$

6) La hauteur maximale est atteinte lorsque la dérivée de z(x) par rapport à x est nulle, soit $\frac{dz}{dx}=0$. $z_{max} = h_o + \frac{v_O^2\sin^2\alpha}{2g}$.

7) La résistance de l'air ajoute une force opposée au mouvement. Selon la vitesse de l'objet considéré, elle est proportionnelle à la vitesse ou au carré de la vitesse (vitesse élevée). On a un système du type $\begin{cases}\vec{P}+\vec{F}=m\vec{g}\\ \vec{F}=-k\left|v\right|^{\delta}\vec{v}\end{cases}$. δ est typiquement compris entre 0 et 4.

4.2.22 □ □ Balistique: tir au pigeon

Le mouvement de la balle de fusil peut être décrit par :

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1 \cos\alpha_1 (t - t_0) \\ y_1(t) = v_1 \sin\alpha_1 (t - t_0) - \dfrac{g}{2}(t - t_0)^2 \end{cases}$$ qui donne pour trajectoire :

$$y_1 = x_1 \tan\alpha_1 - \frac{g\left(1 + \tan^2\alpha_1\right)}{2v_1^2} x_1^2.$$

De même pour le pigeon :

$$\begin{cases} x_2(t) = x_0 + v_2 \cos\alpha_2 t \\ y_2(t) = v_2 \sin\alpha_2 t - \dfrac{g}{2} t^2 \end{cases} \text{ et } y_2 = (x_2 - x_0) \tan\alpha_2 - \frac{g\left(1 + \tan^2\alpha_2\right)}{2v_2^2}(x_2 - x_0)^2.$$

Au point d'impact les coordonnées sont égales et donc : $y_2 = y_1$ avec le même x, cela revient à résoudre une équation du second degré en x. On a deux solutions. Si celles-ci sont complexes, cela signifie que la vitesse de la balle ou l'angle α_1 est trop petit devant la distance x_0. Une fois que l'on a les solutions réelles acceptables, on impose que les projectiles y passent en même temps. On trouve alors deux solutions, deux temps autorise l'impact.

4.2.23 □ Glissement sans frottement sur un plan incliné.

1) Bilan des forces présentes : Le poids dirigé vers les z négatifs. La réaction du support perpendiculaire à ce dernier, et la tension du fil parallèle au plan.

PFD à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0}$. On projette la relation vectorielle sur les Z et X :

$$\begin{cases} -T + mg\sin\alpha = 0 \\ R - mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ R = mg\cos\alpha \end{cases}.$$

2) On remplace T par $F_f = \mu R$. On a donc : mg sin α = μ mg cos α d'où μ = tan α.

3) Bilan des forces : Poids et réaction du support. Les deux forces n'étant pas colinéaires, il ne peut y avoir équilibre.

PFD : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$.

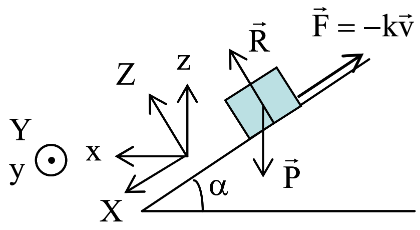
L'accélération selon 0Z est nulle, seul l'accélération sur 0X est non nulle.

$$\begin{cases} mg\sin\alpha = ma_X \\ R - mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \text{ d'où l'on déduit } \begin{cases} g\sin\alpha = \ddot{X} \\ R = mg\cos\alpha \end{cases}.$$

D'après les conditions initiales, à t = 0, $\begin{cases} Y = v_{y0} t \\ X = \dfrac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2 + v_{x0} t \end{cases}$, l'équation de la trajectoire est : $X = \dfrac{1}{2}\dfrac{g\sin\alpha}{v_{y0}^2} Y^2 + \dfrac{v_{x0}}{v_{y0}} Y$: parabole.

4) a) La force a pour unité le Newton ou $kg.m.s^{-2}$. $[k] = kg.s^{-1}$.

b)



Bilan des forces : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$mg\sin\alpha\ \vec{e}_x - mg\cos\alpha\ \vec{e}_z + R\vec{e}_z - k\vec{v} = m\vec{\gamma}$

Le solide reste en contact avec le support, par conséquent, l'accélération est selon OX ainsi que la vitesse et donc la force de frottement.

c) $\begin{cases} mg\sin\alpha - kv_x = m\dfrac{dv_x}{dt} \\ -mg\cos\alpha + R = 0 \end{cases}$, donc $R = mg\cos\alpha$ et $\dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{k}{m}v_x = g\sin\alpha$.

d) Recherche solution particulière : $v_x = \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$.

Recherche de la solution sans second membre : $\dfrac{dv_x}{dt} + \dfrac{k}{m}v_x = 0$, on trouve $v_x(t) = a\ e^{-\frac{k}{m}t}$.

La solution générale s'écrit comme la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre : $v_x(t) = a\ e^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}\sin\alpha$.

En tenant compte de la condition initiale sur la vitesse, on obtient $a = v_{x0} - \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$.

Lorsque t tend vers l'infini, la vitesse tend vers $v_{lim} = \dfrac{mg\sin\alpha}{k}$.

$$v_x(t) = \left(v_{x0} - v_{lim}\right)\ e^{-\frac{k}{m}t} + v_{lim}.$$

e) $$\int_0^X dX = \int_0^t \left[\left(v_{x0} - v_{lim}\right)\ e^{-\frac{k}{m}t} + v_{lim}\right]dt$$

$$X(t) = \frac{m}{k}\left(v_{x0} - v_{lim}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + v_{lim}t.$$

4.2.24 Freinage d'un parachutiste.

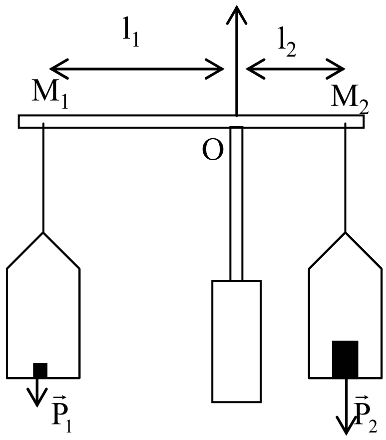
Lorsque le parachutiste atteint sa vitesse limite, la somme des forces est nulle, on a donc : $mg = 20\ v^2$, on en déduit immédiatement $v = 7\ m.s^{-1}$.

4.2.25 Serrage d'écrou.

F = M/d = 4,5 N.

F' = M/(d sin α) = 9 N.

4.2.26 Balance en équilibre.



La solution donnée par la grande majorité des candidat est la suivante : $l_1 m_1 = l_2 m_2$ donnant immédiatement la valeur de la masse cherchée. Le résultat est bon mais il n'est pas justifié.

Le système considéré est la balance avec un point fixe O.
Les forces en présence sont les poids $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ ainsi que la réaction de la balance (sans laquelle elle tomberait …).
Le bilan des forces est : $\vec{R}+\vec{P}_1+\vec{P}_2=\vec{0}$ qui donne immédiatement : $R=(m_1+m_2)g$.

L'équilibre des moments donne :
$\overrightarrow{OP_1}\wedge\vec{P}_1+\overrightarrow{OP_2}\wedge\vec{P}_2=\vec{0}$ où P_1 et P_2 sont les points d'applications des poids. Les propriétés du produit vectoriel amène à $\overrightarrow{OM_1}\wedge\vec{P}_1+\overrightarrow{OM_2}\wedge\vec{P}_2=\vec{0}$ et donc à $l_1 m_1 = l_2 m_2$. $m_1 = 400$ g.

4.2.27 Clé plate.

1) $\vec{A}\begin{vmatrix}0\\-60\\0\end{vmatrix},\vec{B}\begin{vmatrix}0\\-40\\0\end{vmatrix},\vec{C}\begin{vmatrix}0\\-50\\0\end{vmatrix}.$

$$\vec{M}_o\left(\vec{A}\right)=\overrightarrow{OA}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}12\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\-60\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\-720\end{vmatrix},\left\|\vec{M}_o\left(\vec{A}\right)\right\|=720\text{N.mm}=0,72\text{N.m.}$$

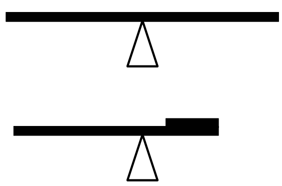
2) $$\vec{M}_o\left(\vec{B}\right)=\overrightarrow{OB}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}22\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\-40\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\-880\end{vmatrix},\left\|\vec{M}_o\left(\vec{B}\right)\right\|=880\text{N.mm}=0,88\text{N.m.}$$

$$\vec{M}_o\left(\vec{C}\right)=\overrightarrow{OC}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}31\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\-50\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\-1550\end{vmatrix},\left\|\vec{M}_o\left(\vec{C}\right)\right\|=1550\text{N.mm}=1,55\text{N.m.}$$

3) a) La force $\vec{C}$ car c'est elle qui engendre le moment le plus élevé.

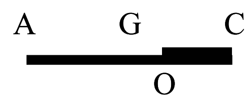
b) La force $\vec{A}$ au point C : $\overrightarrow{OC}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}31\\0\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\-60\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\-1860\end{vmatrix},\left\|\vec{M}\right\|=1,86\text{N.m.}$

4.2.28 Le bâton plié sur le pivot.



La masse est égale de chaque côté, donc le poids est identique. En revanche les centres de masse, soient les points d'application des deux forces ne sont plus équidistants du pivot. Le moment des forces n'est plus égal. Il y a déséquilibre.
Pour retrouver le nouvel point d'équilibre, on applique le moment des forces.

Soit μ la masse linéique : $\mu = M/L$.
Soit G le nouveau centre d'inertie.
Le bâton est soumis à quatre forces.



La réaction du support en G.
Les trois poids en G_A, G_O et G_C, milieu des segments GA, GC et OC.

$$\overrightarrow{P_A} = \mu GA\vec{g}, \overrightarrow{P_O} = \mu GO\vec{g}, \overrightarrow{P_C} = \mu CO\vec{g}.$$

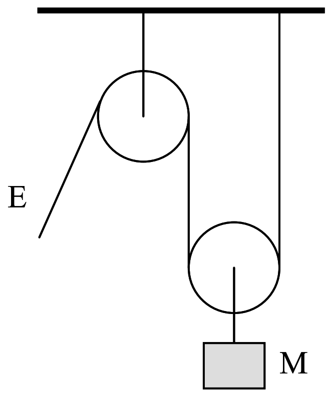
$$GG_A = OA - OG = \frac{L}{2} - OG, GG_O = \frac{GO}{2}, GG_C = OG + \frac{OC}{2} = OG + \frac{L}{8}.$$

On effectue la somme des moments.

$$\overrightarrow{GG_A} \wedge \overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{GG_O} \wedge \overrightarrow{P_O} + \overrightarrow{GG_C} \wedge \overrightarrow{P_C} = \vec{0} \mapsto OG = \frac{L}{16}.$$

4.2.29 Poulies et traction.

1) Il faut considérer deux systèmes formés par les deux poulies.
La première poulie supportant la masse :
Les forces appliquées sur cette dernière sont : le poids dû à la masse M, la tension du fil relié au support, la tension du fil transmis par la deuxième poulie.
La seconde poulie où s'exerce la contre réaction :
Les forces appliquées sont la force de traction, la tension du fil due à la première poulie et la réaction du support en son centre.



$$\vec{P} + \vec{T}_s + \vec{T}_p = \vec{0} \rightarrow T_s + T_p = mg.$$

$$\overrightarrow{OM}_{Ts} \wedge \vec{T}_s + \overrightarrow{OM}_{Tp} \wedge \vec{T}_p = \vec{0} \rightarrow T_s = T_p.$$

$$\overrightarrow{OM}_F \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM}_{Tp} \wedge \vec{T}_p = \vec{0} \rightarrow F = T_p.$$

$$2F = mg \rightarrow F = \frac{1}{2}mg. \text{ AN : } F = 25 \text{ N}.$$

2) La masse se soulève de 0.5 m, le travail du poids est donnée par l'expression $W_p = mgh$, on a donc $W_p = - 5 \times 0.5 \times 10 = -25$ J car il est résistif. Le travail effectué est donc l'opposé de cette valeur. W = 25 J. Le travail de la force est donnée par $W_f = F\,l = 25$ J, on a donc : l = 1 m, soit l = 2h.
3) Le principe du palan est de mettre à la suite des poulies fixes et libres afin de réduire l'effort. Il est facile de montrer que l'effort pour soulever une masse est divisée par deux pour chaque poulie libre.

4.2.30 Calcul d'énergie cinétique.

$E_c(v) = ½\, m\, v^2 = 0{,}5 \times 1200 \times 20^2 = 240000$ J.
$E_c(2v) = 4\, E_c(v) = 960000$ J.

4.2.31 Énergie potentielle du ressort.

$F = k\,x$, $k = F/x = 1/0{,}01 = 100$ SI,

$E_p = ½\ k\ x^2 = 0,5\ 100\ 0,01 = 0,5$ J.

4.2.32 Attention au train.

Solution : a) $E_{c1} = ½\ m\ v^2 = 0,5\ 400\ 10^3\ (100/3,6)^2 = 1,55\ 10^8$ J,
b) Par application du théorème de l'énergie cinétique pour un système conservatif, on a conservation de l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. On a donc $E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$. Or $E_{p1} = 0$ et $E_{c2} = 0$. On a donc :
$E_{p2} = mgh \Rightarrow h = 1,55\ 10^8 / (400\ 10^3 \times 9,8) = 39,5$ m.

4.2.33 Energie nécessaire de poussée.

Par définition, le travail est : $dW = \vec{F}.d\vec{x} \rightarrow W = \int \vec{F}.d\vec{x} = F.x = 300.3 = 900$ N.

Il n'y a pas de variation d'altitude donc l'énergie potentielle reste constante.
$F = \mu R$ avec R réaction du sol et donc égale et opposé au poids, $\mu = F/R = 300/750 = 0,4$.

4.2.34 Puissance de montée.

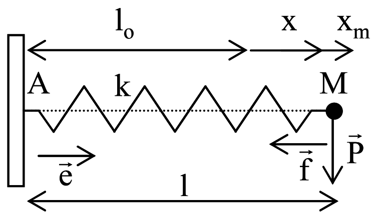
L'énergie nécessaire pour monter l'escalier est de : E = mgh = 75.10.3 = 2250 J.
La puissance vaut : P = E/t = 2250/5 = 450 W.
La hauteur est donnée par : $h = E_{canette} / mg = 180\ 10^3/750 = 240$ m. Si l'on admet qu'un étage d'un immeuble mesure 2,40 m, cette hauteur correspond à 10 étages.

4.2.35 Bateau à moteur.

Par définition, la puissance est le produit scalaire de la vitesse par la force.
On a donc ici : P = F v. Le mouvement étant rectiligne uniforme, la force de traction est égal et opposée à la force de frottement. On a donc : $F_f = P/v = 80.746 / 2.77 = 21485$ N.

4.2.36 □ □ Ressort horizontal et vertical.

1) a)



Le point matériel est soumis à deux forces, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force de rappel due au ressort $\vec{F} = -k\ x\ \vec{e}$.

b) Travail du poids entre les positions x_m et x : $W_{\vec{P}} = \int_{x_m}^{x} m\vec{g}\cdot\vec{e}\ dx = 0$ car l'allongement est perpendiculaire à la force.

Travail de la force élastique : $W_{\vec{F}} = \int_{x_m}^{x} -k\ x\ \vec{e}\cdot\vec{e}\ dx = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_m^2$.

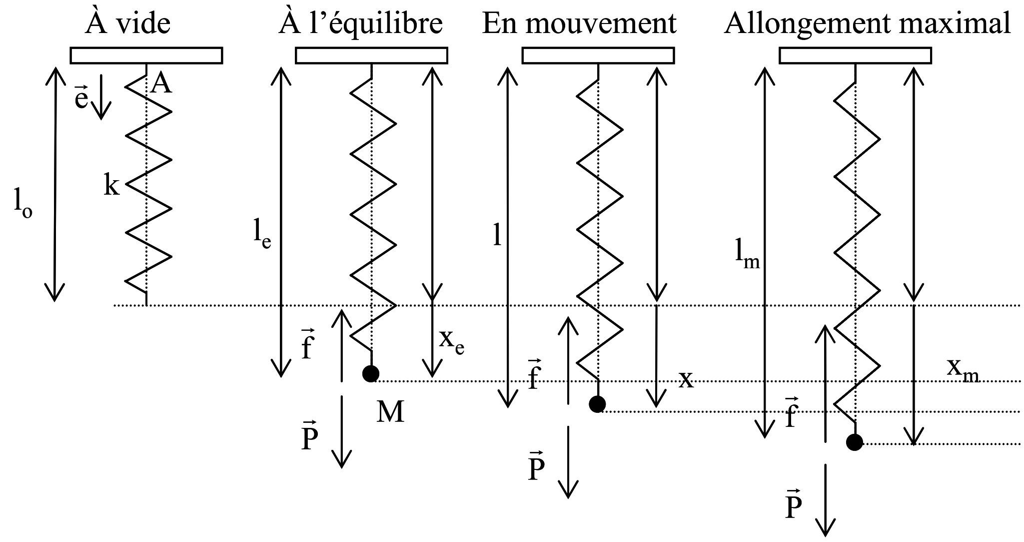
c) $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv^2$. D'après le théorème de l'énergie cinétique : W = ΔE_c se traduisant par : $-\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv^2$. On a donc : $\begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \\ E_p + E_c = E_m \end{cases}$.

d) La vitesse maximale est obtenue lorsque l'allongement est nul, soit $v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m$.

e) Immédiatement : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. Par identification à x(t) = a cos(ωt+φ), on trouve : $\omega^2 = \frac{k}{m}$, a = x_m et φ = 0. La solution s'écrit finalement : x(t) = x_m cos ω t avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre. La période et la fréquence sont : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

f) D'après le PFD, $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}$, soit en projetant sur l'axe, $-k\;x = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

2)a)



b) A l'équilibre, $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ soit $mg\,\vec{e} - kx_e\vec{e} = \vec{0}$ avec $x_e = l_e - l_0$ et donc : $x_e = \frac{mg}{k}, l_e = l_0 + \frac{mg}{k}$.

c) PFD : $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$ soit : $mg - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$. On pose x = x_e + X. On a alors : $\underbrace{mg - kx_e}_{=\vec{0}} - kX = m\frac{d^2X}{dt^2}$ soit : $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{k}{m}X = 0$. On cherche X(t) sous la forme :

X(t) = a cos(ωt+φ). X(0) = (x_m-x_e) = a cos φ. $\dot{X}$(0) = 0 = -a ω sin φ. Ceci implique que φ = 0 et a = x_m-x_e. De la même manière qu'au 1), on trouve que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et finalement :

X(t) = (x_m-x_e) cos $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ et x(t) = x_e + (x_m-x_e) cos $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

4.2.37 □ Plan incliné et ressort.

1) Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction du plan incliné $\vec{R}$. La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k\ x\ \overrightarrow{e_x}$.

2) $\vec{R}$ est orthogonale à la direction de propagation et pas conséquent le travail de la force est nul.

Travail du poids entre la position initiale (M à -L du ressort) et une position intermédiaire x :

$$W_{\vec{P}} = \int_{-L}^{x} m\vec{g}\cdot\overrightarrow{e_x}dx = \int_{-L}^{x} mg\ \sin\alpha\ dx = mg\ \sin\alpha\left(x+L\right).$$

Travail de la force élastique : $W_{\vec{F}} = \int_{0}^{x} -k\ x\ \overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_x}dx = \int_{0}^{x} -k\ x\ dx = -\frac{1}{2}k\ x^2.$

3) $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = mg\ \sin\alpha\left(x+L\right) - \frac{1}{2}k\ x^2$. Lorsque l'allongement est maximal, la vitesse est nulle et donc : $mg\ \sin\alpha\left(x+L\right) - \frac{1}{2}k\ x^2 = 0$. Il reste à résoudre l'équation du second degré.

On pose : $a = \frac{mg\ \sin\alpha}{k}$, $x_m = a + \sqrt{a^2 + 2aL}$.

4) La vitesse est maximale lorsque l'énergie cinétique l'est, on dérive l'énergie cinétique par rapport à x : $\frac{dE_c}{dx} = mgL\ \sin\alpha - kx_m = 0, x_m = a.$

4.2.38 □ □ Groupement série et parallèle de deux ressorts.

Association en parallèle :
Pour allonger le ressort de x, il faut fournir la force $F_1 = k_1\ x$ et $F_2 = k_2\ x$, la somme des forces est donc : $F = (k_1 + k_2)\ x = k\ x$ d'où l'on déduit : $k_{//} = k_1 + k_2$.

Association en série :
On considère le point A situé entre les deux ressorts et le point B situé à l'extrémité du ressort (2).
En B, la force exercée est : $\vec{F} = -k_2\left(l_2 - l_{02}\right)\vec{e}_x$
À l'équilibre, le point A est immobile ce qui implique que la somme des forces appliquée en ce point est nulle. La force exercée par le ressort (1) est : $\vec{F}_1 = -k_1\left(l_1 - l_{01}\right)\vec{e}_x$. La force exercée par le ressort (2) est : $\vec{F}_2 = -\vec{F} = +k_2\left(l_2 - l_{02}\right)\vec{e}_x$, on a donc : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 = \vec{F}$.
En B, on a donc :

$$\vec{F} = -k_2\left(l_2 - l_{02}\right)\vec{e}_x = -k\left(l_2 - l_{02} + l_1 - l_{01}\right)\vec{e}_x = -k\left(\frac{\vec{F}_1}{-k_1} - \frac{\vec{F}}{k_2}\right) = k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)\vec{F}$$

ce qui implique :

$$k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = 1 \rightarrow \frac{1}{k_{\text{série}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

4.2.39 □ Rebond d'une balle. Un paradoxe classique.

1) 1er rebond : Chute de h : la balle arrive au sol à une vitesse : mgh = ½ m v_o^2 => $v_0 = \sqrt{2gh}$.
Au rebond, v_1 = e v_o et donc on détermine h_1 / mgh_1 = ½ m v_1^2 => $h_1 = e^2$ h.

2ème rebond : après être remontée jusqu'à h_1, elle chute d'autant, arrive à la vitesse v_1 sur le sol et rebondit avec une vitesse v_2 = e v_1.
On détermine h_2 / mgh_2 = ½ m v_2^2 => $h_2 = e^2 h_1 = e^4$h.
…
nième rebond : $h_n = e^{2n}$ h.

2) Le nombre de rebond théorique est infini !
Un objet avec une vitesse nulle lâché dans le vide suit la loi : z =½ g t^2.
On a donc : $t_0^2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ et $t_n^2 = \sqrt{\frac{2h_n}{g}}$.
Le temps total est :
T = t_0 + 2 ($t_1 + t_2 + t_3$ +…+ t_n +…). On a donc : $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1+e}{1-e}$.
Vous pouvez vous amusez à démontrer que la distance parcourue par la balle est finie et égale à : $H = h\frac{1+e^2}{1-e^2}$.
3) Le paradoxe est donc le suivant : la balle rebondie un nombre de fois infini mais parcourt une distance finie et ce pendant un temps fini. La physique classique ne permet pas de lever le paradoxe si l'on suppose l'expérience parfaite sans résistance de l'air et autres effets perturbateurs. La solution est peut être à rechercher dans la mécanique quantique …