Maths 06

Université A.MIRA — Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Technologie — 2ième Année

♣— Examen de Rattrapage d'Analyse Numérique —♣

Exercice 1 (05.00 points) : Soit à résoudre l'équation définie par :

$$F(x) = x^3 + 5x - 1 = 0. \tag{1}$$

1. Étudier les variations de F dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α dans $\mathbb{R}$.
3. Établir que $\alpha \in I = [0, \frac{1}{2}]$.
4. Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation (2) suivante : $x = \varphi(x) = \frac{1-x^3}{5}$.
5. Montrer que la suite $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers α, $\forall x_0 \in I$.
6. Montrer que $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{17}|x_{n+1} - x_n|$, $\forall x_0 \in I$.
7. Pour $x_0 = \frac{1}{2}$, calculer x_2 avec 5 chiffres significatifs puis donner une estimation de l'erreur $|x_2 - \alpha|$.

Exercice 2 (05.00 points) : Soit l'équation suivante :

$$F(x) = -4\cos(x) + e^x.$$

1. Séparer graphiquement les racines de $F(x) = 0$ et déduire leur nombre.
2. Chercher à 10^{-5} près, une racine de F par la méthode de Newton dans l'intervalle $I = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, en commençant par $x_0 = \frac{\pi}{4}$. (Arrondir les itérés à quatre décimales et tester $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-5}$).

Exercice 3 (05.00 points) : Soient les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} x & r & s \\ r & y & 0 \\ s & 0 & z \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ k & v & 0 \\ l & m & w \end{pmatrix}, \quad \text{avec } u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0.$$

1. Calculer le produit LL^t.
2. Quelles conditions doivent vérifier les nombres x, y, z, r, s pour que la matrice A puisse s'écrire sous la forme $A = LL^t$.
3. Déduire alors L si l'on sait que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (05.00 points) : Le système linéaire $AX = b$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 - 2\,\beta x_2 = 1, \\ x_1 + 2\,x_2 = 0, \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

où β est un paramètre réel.

1. Donner une condition suffisante sur le paramètre β pour que les deux méthodes itératives de Gauss-Seidel et de Jaccobi soient convergentes.
2. Comparer les deux méthodes itératives.

Bon Courage
✓ Mr Boualem

Année 2011 - 2012

Corrigé de L'examen de Rattrapage Maths 06

Exo N° 1.

$$F(x) = x^3 + 5x - 1 = 0.$$

1°/ $Df_F = \mathbb{R}$

$F'(x) = 3x^2 + 5 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

0,5

$\lim\limits_{-\infty} F(x) = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} F(x) = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2°/ D'après le tableau de variations, on remarque que F change de signe et qu'elle est monotone dans $\mathbb{R}$, il s'ensuit donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires que F admet une unique racine dans $\mathbb{R}$.

0,5

Rédigé par
Mr BOUALEM

3°/ comme F est définie et continue ainsi que monotone sur $\mathbb{R}$ (voir Q1), donc aussi sur $[0, \frac{1}{2}]$; De plus :

0,5

$$\left.\begin{array}{l} F(0) = -1 \\ F(1/2) = \frac{13}{8} \end{array}\right\} F(0) \times F(1/2) < 0.$$ Donc d'après le

TVI, on a $\alpha \in [0, 1/2]$:

4°/ $F(x) = x^3 + 5x - 1 = 0 \iff 5x = 1 - x^3$

0,5

$$\iff x = \frac{1 - x^3}{5} = \varphi(x).$$

5°/ Appliquons le Théorème du point Fixe.

i- <u>Contraction</u> :

φ est fonction polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^1([0; \frac{1}{2}])$

0,5

$\cdot\ \varphi'(x) = -3/5\, x^2 \Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{3}{5} x^2$

$$\Rightarrow k = \max_I |\varphi'(x)| = \frac{3}{5} \times 1/4 = \frac{3}{20} < 1$$

Par Conséquent, φ est contractante dans I ii: stabilité

0,1 $\varphi([0,\frac{1}{2}])=[\varphi(\frac{1}{2}),\varphi(0)]$, car $\varphi'(x)\leq 0$ et $\varphi \searrow$

Donc $\varphi([0,\frac{1}{2}])=[\frac{7}{40},\frac{1}{5}]\subset[0,\frac{1}{2}]$.

Par Conséquent, $[0,\frac{1}{2}]$ est stable par φ.

Conclusion : D'après le théorème du point Fixe, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α $\forall x_0\in I$.

6°/ D'après le cours :

$$|x_{n+1}-\alpha|\leq\frac{k}{1-k}|x_{n+1}-x_n|,$$

où $k=\max_I|\varphi'(x)|=\frac{3}{20}$, donc

$$|x_{n+1}-\alpha|\leq\frac{3}{17}|x_{n+1}-x_n|.$$

1

7°/ $x_0=\frac{1}{2}$

$x_1=\varphi(x_0)=\varphi(\frac{1}{2})=\frac{7}{40}=0,175$

$x_2=\varphi(x_1)=\varphi(\frac{7}{40})=0,19893$

$|x_2-\alpha|\leq\frac{3}{17}|x_2-x_1|\Rightarrow|x_2-\alpha|\leq 4,22\times10^{-3}$

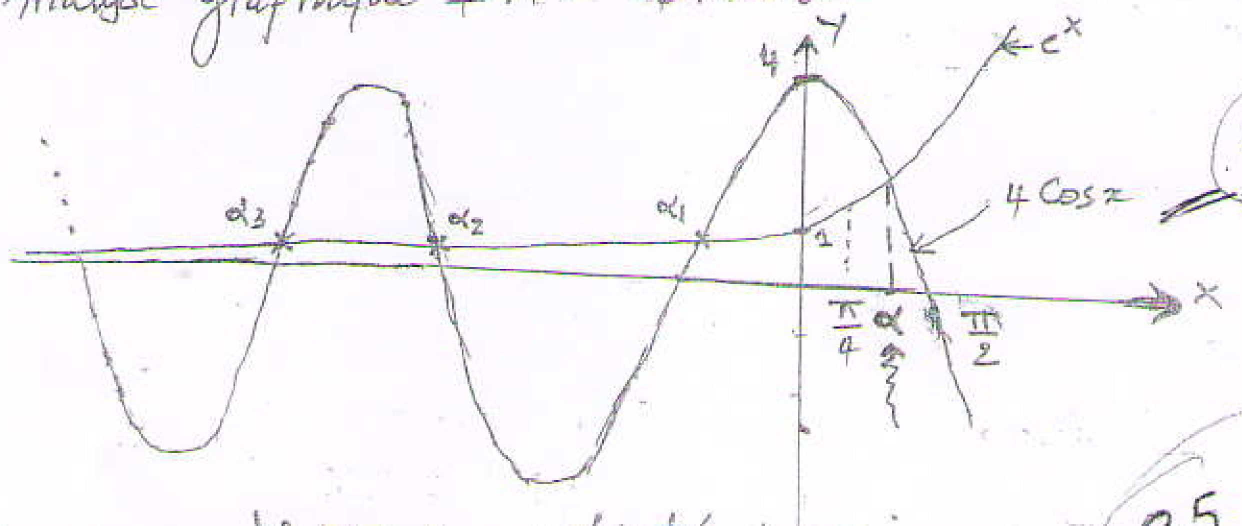
1

5pts

Exo 2 (5pts)

Soit l'équation: $f(x) = e^{x} - 4\cos x = 0$.

1°/ Analyse graphique + N^{bre} de racines:



On remarque qu'il $\exists$: Une infinité de racines — 0,5

\- Une racine (seule) positive $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2°/ Résolution par Newton

On a $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $f \in C^{\infty}(I)$.

i/ $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(\frac{\pi}{4}) = -0{,}63514 < 0 \\ f(\pi/2) = 4{,}8104 > 0 \end{array}\right\} f(\pi/4)\cdot f(\pi/2) < 0$

ii/ $\rightarrow$ $\forall x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = e^{x} + 4\sin x > 0$ — 1

iii/ $\rightarrow$ $\forall x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $f''(x) = e^{x} + 4\cos x > 0$

point de départ $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} f(\pi/2) \simeq 0{,}81198\ldots \\ f''(\pi/4) \simeq 8{,}80897\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$

Donc le Processus de Newton s'écrit:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 4\cos x_n}{e^{x_n} + 4\sin x_n}.$$

$1^{ère}$ Iteration: 0,5

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - 4\cos x_0}{e^{x_0} + 4\sin x_0} \simeq 1{,}02480 \; ; \; |x_1 - x_0| \simeq 0{,}54599\ldots > 10$$

$2^{ème}$ Iteration: 0,5

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1} - 4\cos x_1}{e^{x_1} + 4\sin x_1} \simeq 0{,}91046 \; ; \; |x_2 - x_1| \simeq 0{,}11434 >$$

$3^{ème}$ Itération: 0,5

$$x_3 \simeq 0{,}90480\ldots \; ; \; |x_3 - x_2| \simeq 0{,}00566\ldots > 10^{-5}$$

$4^{ème}$ Iteration: 0,5

$$x_4 \simeq 0{,}90479 \; ; \; |x_4 - x_3| \simeq 0{,}00001 = 10^{-5}$$

$5^{ème}$ Iteration: 0,5

$$x_5 \simeq 0{,}90479 \; ; \; |x_5 - x_4| \simeq 0 < 10^{-5}$$

Donc, $\boxed{x^* = \xi = x_5 \simeq 0{,}90479}$ 0,5

Exo 3 (5pts)

$$A = \begin{bmatrix} x & r & s \\ r & y & 0 \\ s & 0 & z \end{bmatrix} ; \quad L = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ k & v & 0 \\ l & m & w \end{bmatrix}$$

1/

* Calculons le produit $R.R^t$

$$LL^t = \begin{bmatrix} u^2 & uk & ul \\ uk & k^2+v^2 & kl+vm \\ ul & kl+vm & l^2+m^2+w^2 \end{bmatrix}$$

1

2/ * Posons $A = LL^t$ on doit donc avoir

$$\begin{cases} u^2 = x \quad ; \quad uk = r \quad ; \quad ul = s \quad \dots (1) \\ k^2+v^2 = y \quad ; \quad kl+vm = 0 \quad \dots\dots (2) \\ l^2+m^2+w^2 = z \quad \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

. Les équations (1) donnent alors.

$$u = \sqrt{x} \; ; \; k = \frac{r}{u} = \frac{r}{\sqrt{x}} \text{ et } l = \frac{s}{u} = \frac{s}{\sqrt{x}}$$

La première condition est donc : $\boxed{x > 0}$ 1

. Les équations (2) donnent

$$v^2 = y - k^2 = y - \frac{r^2}{x} = \frac{xy - r^2}{x} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{xy-r^2}{x}}$$

$$kl + vm = 0 \Rightarrow m = \frac{-kl}{v} = \frac{\frac{-rs}{x}}{\sqrt{\frac{xy-r^2}{x}}}$$

$$m = \frac{-rs}{\sqrt{x(xy-r^2)}}$$

• La deuxième Condition est donc

$$\boxed{xy - r^2 > 0}$$ 1

En fin Equation (3) nous donne

$$w^2 = z - l^2 - m^2 = z - \frac{s^2}{x} - \frac{r^2 s^2}{x(xy - r^2)}$$

$$= \frac{(xy - r^2)(xz - s^2) - r^2 s^2}{x(xy - r^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \sqrt{\frac{(xy - r^2)(xz - s^2) - r^2 s^2}{x(xy - r^2)}}}$$

La 3ème Condition est donc

$$\boxed{(xy - r^2)(xz - s^2) - r^2 s^2 \geqslant 0}$$ 1

Remarque: Cette 3ème Condition peut être déduite autrement en ecrivant $\det(A) = |A| = \det(L) \times \det(L^t)$

$$= u^2 \cdot v^2 \cdot w^2 \Rightarrow w^2 = \frac{\det A}{u^2 v^2}$$

Cela suppose donc que $|A| \geqslant 0$

La 3ème condition est équivalente à $|A| \geqslant 0$.

3/ Calculons la matrice $\mathbf{L}$

$u=\sqrt{x}=\sqrt{1}=1$; $h=\frac{r}{\sqrt{x}}=\frac{-1}{1}=-1$; $l=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$

$$v=\sqrt{\frac{xy-r^2}{x}}=\sqrt{\frac{1\times 2-(-1)^2}{1}}=1$$

$$m=\frac{-rs}{\sqrt{x(xy-r^2)}}=\frac{-(-1)\times 1}{\sqrt{1(2-1)}}=1$$

$$w=\sqrt{\frac{(xy-r^2)(xz-s^2)-r^2s^2}{x(xy-r^2)}}=\sqrt{\frac{1\times(5-1)-1}{1}}=\sqrt{3}$$

Donc

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

1

On a bien

$$A=LL^t.$$

On peut déduire : $\det A=u^2.v^2.w^2=1^2.1^2.(\sqrt{3})^2=3$

Exercice N°4 : (5 pts)

1. On sait que si A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, alors les méthodes de Gauss - Seidel et de Jacobi sont Convergentes.
1 On voit bien cette Condition est satisfaite par la $2^{ème}$ et la $3^{ème}$ ligne de la matrice A.
Il suffit alors imposer $1 > |2(1-\beta)|$, d'où

$$\frac{1}{2} < \beta < 3/2$$

2. Matrice de Jacobi

1,5

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

. dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \mp\sqrt{1-\beta}$.
Donc $\rho(J) = \sqrt{1-\beta}$ et

$$\rho(J) < 1 \iff 0 < \beta < 2$$

* Matrice de Gauss - Seidel.

1,5

$$GS = \begin{bmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = 1-\beta$. Donc $\rho(GS) = 1-\beta$ et $\rho(GS) < 1 \iff \beta > 0$

1 * On voit que $\rho(GS) = \rho^2(J)$, et donc la méthode de Gauss - Seidel Converge plus vite que celle de Jacobi.