Maths 04

Université A.MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département de Technologie-2ème Année

15 Septembre 2011

Examen Final de Probabilités et Statistiques

Exercice 1 (06.00 points) : Un laboratoire pharmaceutique a enquêté 92 visiteurs médicaux sur le nombre de kilomètres qu'ils effectuaient par jour pour représenter ses produits. Les résultats sont ceux du tableau suivant :

Trajet en Km	[10, 20[	[20, 40[	[40, 50[	[50, 80[	[80, 100[
Nombre de visiteurs	9	26	19	24	14

1. Tracer le polygône des fréquences et calculer le Mo.
2. Tracer la courbe cumulative croissante des fréquences et calculer la Médiane Me.
3. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et la variance $V(X)$.
4. Déterminer l'intervalle interquartile.
5. Quel est le nombre de visiteurs dont le trajet effectué est supérieur ou égal à 50 Km ?

Exercice 2 :(06.00 points) Le tableau suivant indique le nombre d'absences d'un échantillon de 20 étudiants à un cours de statistique :

Nombre d'étudiants	6	4	2	2	1	4	1
Nombre d'absences	1	2	3	4	6	7	9

1. Représenter graphiquement le polygône des fréquences et déterminer le Mode Mo.
2. Tracer la courbe des effectifs cumulés croissants.
3. Calculer la Médiane Me, la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X.
4. Quel est le pourcentage d'étudiants ayant moins de quatre absences ?

Exercice 3 : On considère une distribution statistique (X, Y) donnée par :

x_i	1	2	2	3
y_i	4	2	0	−2

1. Calculer la covariance $Cov(X, Y)$. Commenter le résultat obtenu.
2. Déterminer les équations des deux droites de régression.
3. Déduire le coefficient de corrélation linéaire ρ_{XY}.
4. Déterminer l'équation de la droite de Mayer.
5. Donner le point d'intersection des trois droites.

Exercice 4 (02.00 points) :

1. De combien de façons différentes peut-on placer sur une même rangée cinq billes de couleurs différentes ?
2. De combien de façon différentes peut-on placer trois personnes autour d'une table ronde ?

Bon Courage

EXO N° 1

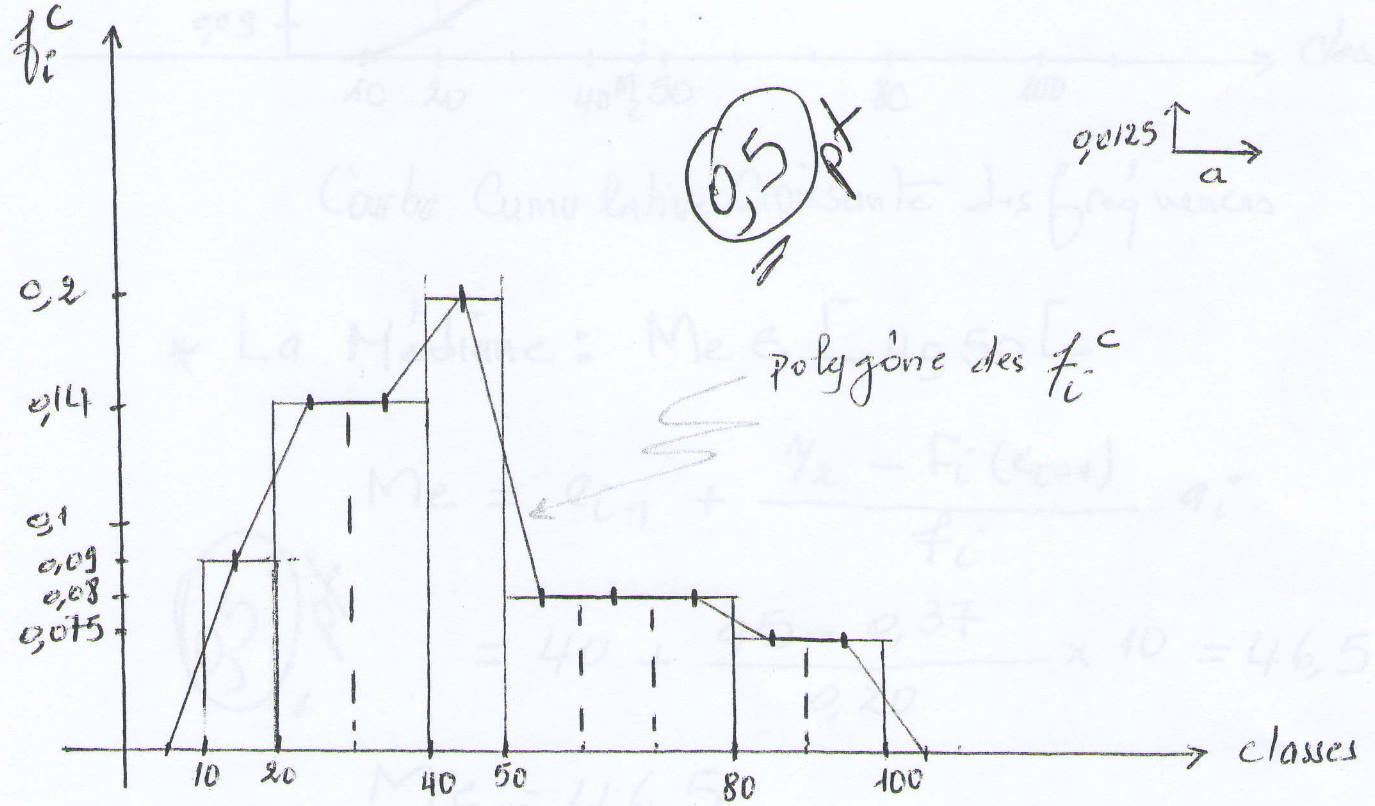
la tableau statistique :

$a = PGCD(a_i) = PGCD(10, 20, 30) = 10$

1,5 pt

Classes	n_i	a_i	x_i	f_i	f_i^c	$F_i \nearrow$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$N_i \searrow$
[10, 20[	9	10	15	0,09	0,09	0,09	1,35	20,25	92
[20, 40[	26	20	30	0,28	0,14	0,37	8,4	252	83
[40, 50[	19	10	45	0,20	0,20	0,57	9	405	57
[50, 80[	24	30	65	0,26	0,086	0,83	16,9	1098,5	38
[80, 100[	14	20	90	0,15	0,075	1	13,5	1215	14
Total	92	~	~	1	~	~	49,15	2990,75	0 ~

1. la Polygône des fréquences.



Histogramme

1 p

* la Mode : $Mo \in [40, 50[$

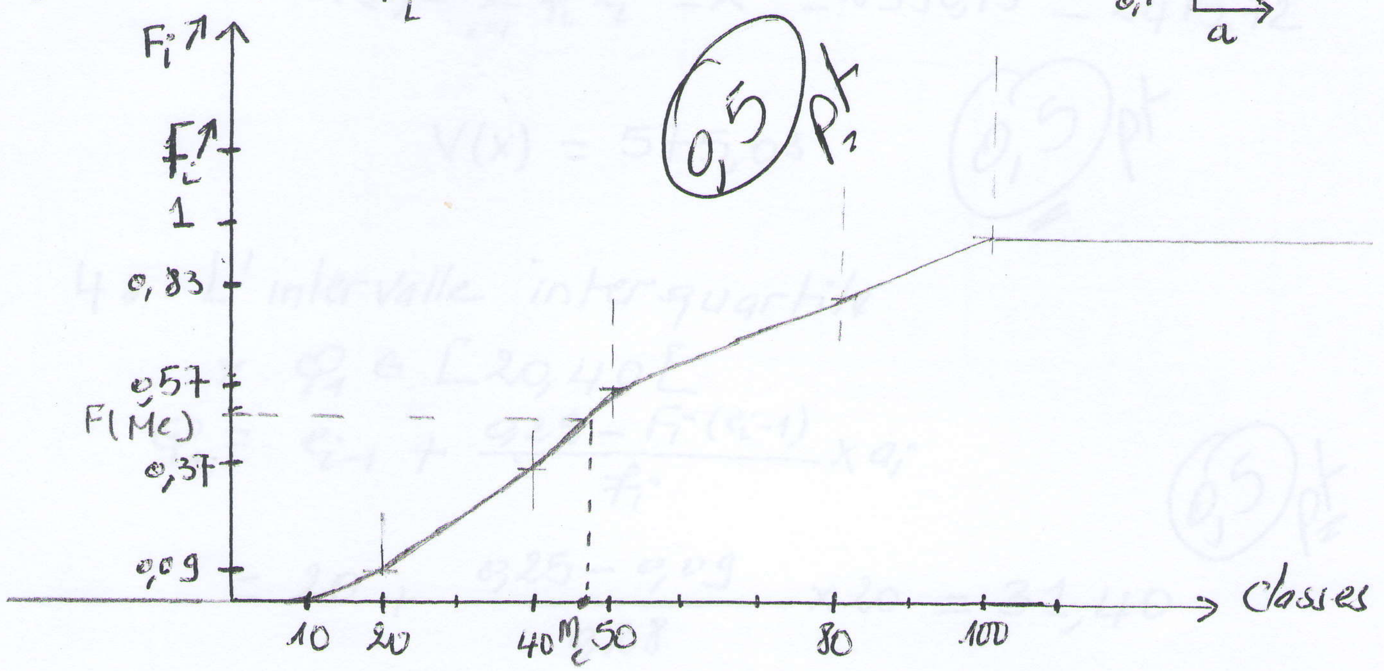
$$Mo = e_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} a_i = 40 + \frac{0{,}2 - 0{,}14}{(0{,}2-0{,}14)+(0{,}2-0{,}08)} \times 10$$

$$= 40 + \frac{0{,}06}{0{,}06 + 0{,}12} \times 10$$

0,5 pt

$Mo = 43{,}33.$

2. La Courbe $F_i \nearrow$



Courbe Cumulative Croissante des fréquences

* La Médiane : $Me \in [40, 50[$

$$Me = e_{i-1} + \frac{1/2 - F_i(e_{i-1})}{f_i} a_i$$

0,5 pt

$$= 40 + \frac{0{,}5 - 0{,}37}{0{,}20} \times 10 = 46{,}5$$

$Me = 46{,}5$

2 p

3.

* La moyenne :

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{5} f_i x_i = 49,15 \quad \text{(voir le tableau)}$$

$$\overline{X} = 49,15$$

0,5 pt

* La Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{5} f_i x_i^2 - \overline{X}^2 = 2990,75 - 2415,72$$

$$V(x) = 575,03$$

0,5 pt

4. L'intervalle interquartile

* $Q_1 \in [20, 40[$

$$Q_1 = e_{i-1} + \frac{0,25 - F_i(e_i - 1)}{f_i} \times a_i$$

0,5 pt

$$= 20 + \frac{0,25 - 0,09}{0,28} \times 20 = 31,40$$

* $Q_3 \in [50, 80[$

$$Q_3 = e_{i-1} + \frac{0,75 - F(e_i - 1)}{f_i} a_i = 50 + \frac{0,18}{0,26} \times 30 = 70,7$$

D'où

$$Q_3 - Q_1 = 70,7 - 31,40 = 39,3$$

0,5 pt

5. N^{bre} de visiteurs dont la trajet $\geq$ à 50 km

0,5 pt

$N_4 \downarrow = 38$ Visiteurs (voir tableau)

3 p

EXO N° 2

la Caractère étudié est : le nombre d'absence d'un étudiant, $n = 20$

la tableau statistique 1 pt

x_i	1	2	3	4	6	7	9	Total
n_i	6	4	2	2	1	4	1	20
$N_i \uparrow$	6	10	12	14	15	19	20	
$n_i x_i$	6	8	6	8	6	28	9	71
$n_i x_i^2$	6	16	18	32	36	196	81	385
f_i	0,3	0,2	0,1	0,1	0,05	0,2	0,05	1

1°. la Polygone de fréquences

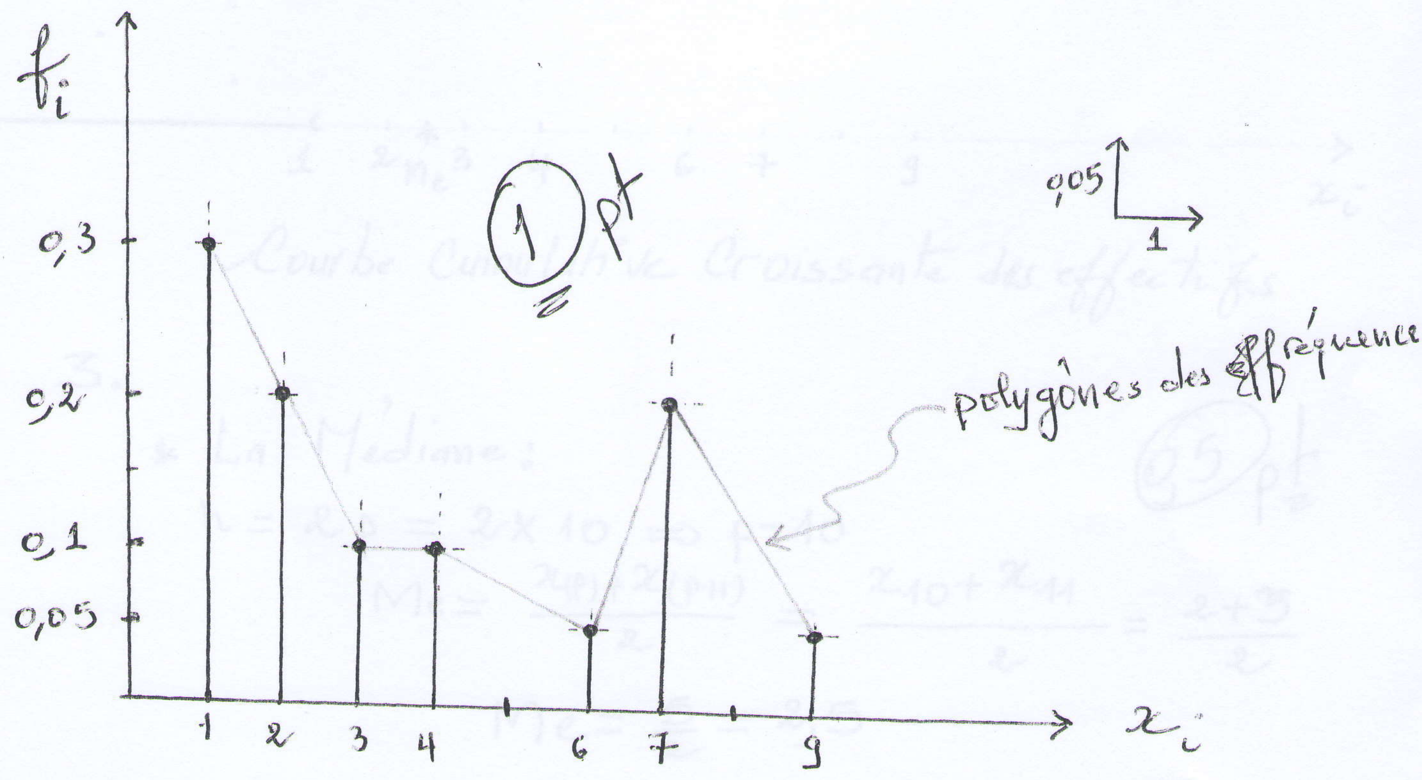


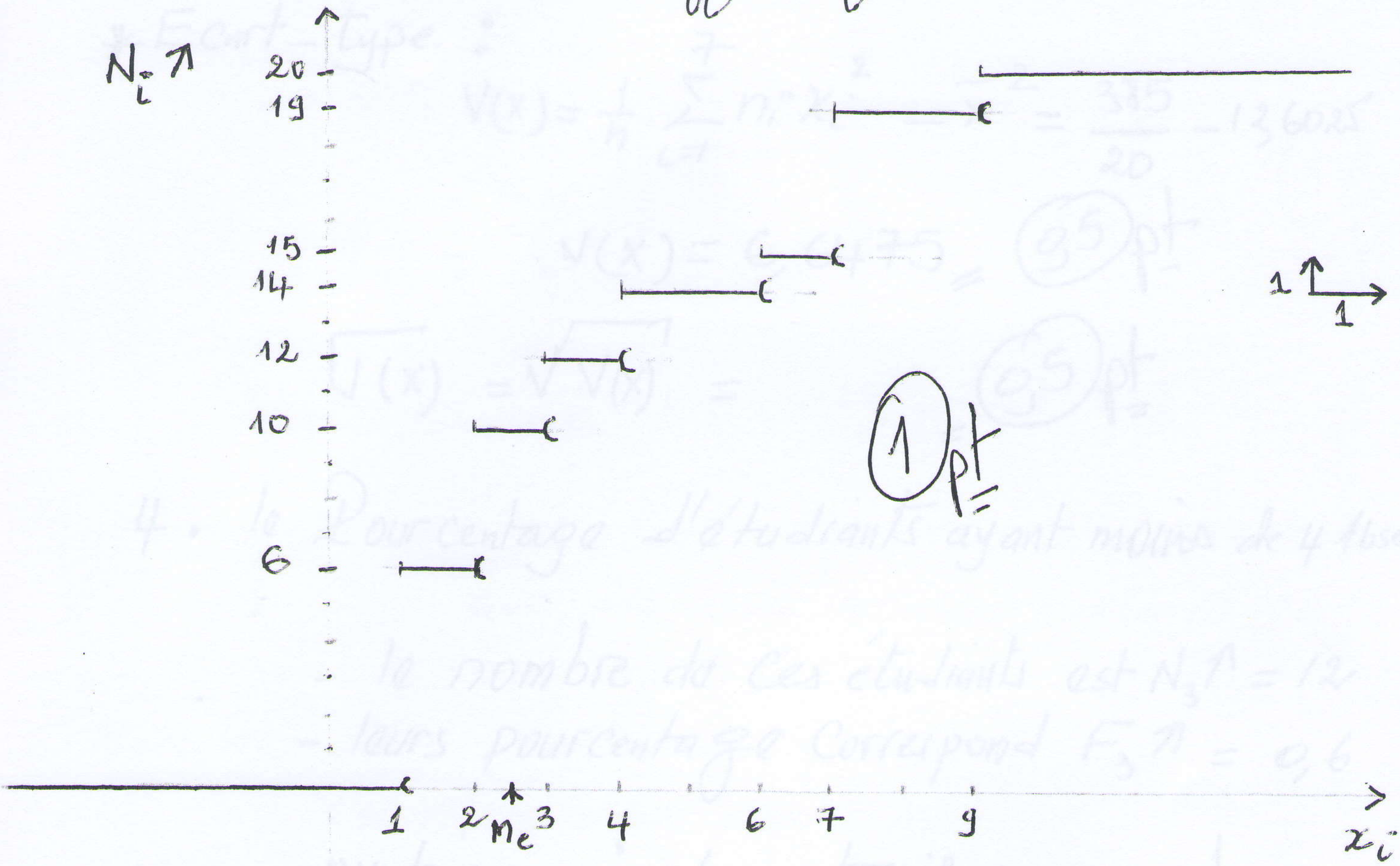
Diagramme en bâtons

4 p

1. b) la Mode :

0,5 pt $\max_{1\le i\le 7}(n_i) = 6 \Rightarrow M_o = x_1 = 1$

2. La Courbe des effectifs Cumulés



1 pt

Courbe Cumulative Croissante des effectifs

3.

* La Médiane :

0,5 pt

$n = 2p = 2\times 10 \Rightarrow p = 10$

$$Me = \frac{x_{(p)} + x_{(p+1)}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{2+3}{2}$$

$$Me = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

5 p

* La moyenne :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = \frac{71}{20} = 3,55$$

0,5 pt

$$\overline{x} = 3,55$$

* Ecart-type :

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{385}{20} - 12,6025$$

$$V(x) = 6,6475$$ 0,5 pt

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} =$$ 0,5 pt

4. le Pourcentage d'étudiants ayant moins de 4 Absence

- le nombre de ces étudiants est $N_3\uparrow = 12$
- leurs pourcentage Correspond $F_3\uparrow = 0,6$

ou bien simplement il correspond

60%

0,5 pt

6 p

Exo N° 3 (06,00 points)

1. la covariance :

$$Cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$$

Avec,

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{1}{4}(1+2+2+3) = 2$$

1 pt

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} y_i = \frac{4}{4} = 1$$

$$Cov(x,y) = \frac{1}{4}(4+4+0-6) - 2\times 1 = \frac{1}{2} - 2 = \frac{-3}{2}$$

Commentaire : Elle est négative, ce qui veut dire que les deux variables évaluent en sens contraire.

0,5 pt

2. les deux droites de régression

a- Y en X : $y = ax + b$, Avec

$$\begin{cases} a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)}, \\ b = \overline{y} - a\overline{x}. \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{1}{4}(1+4+4+9) - 4 = \frac{1}{2}$$

Alors : $a = \dfrac{-3/2}{1/2} = -3$, et $b = 1+6 = 7$

1 pt

D'où : Y en X : $y = -3x + 7$

7 p

X en Y : $x = \alpha y + \beta$, Avec

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{cov(x,y)}{V(Y)} , \\ \beta = \overline{X} - \alpha \overline{Y} \end{cases}$$

$$V(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{4} y_i^2 - \overline{Y}^2 = \frac{1}{4}(16+4+4) - 1 = 5$$

ALors : $\alpha = \dfrac{-3/2}{5} = -0,3$ (1 pt)

$\beta = 2 + 0,3 = 2,3$

D'où :

X en Y : $x = -0,3y + 2,3$

3. le coefficient de Corrélation

$$\rho_{XY}^2 = a \times \alpha = (-3)(-0,3) = 0,9$$ (0,5 pt)

4. L'équation de la droite de Mayer (Δ)

$\Delta : y = ax + b$

$E_1 = \{(1,4), (2,2)\}$, alors : $\overline{X}_1 = 3/2$, $\overline{Y}_1 = 3$

- $G_1(3/2, 3)$

$E_2 = \{(2,0), (3,-2)\}$, alors : $\overline{X}_2 = \frac{5}{2}$, $\overline{Y}_2 = -1$

- $G_2(5/2, -1)$

(8 p)

$G_1 \in \Delta \Rightarrow \overline{Y}_1 = a\overline{X}_1 + b \Rightarrow 3 = \frac{3}{2} a + b \quad \ldots (1)$

$G_2 \in \Delta \Rightarrow \overline{Y}_2 = a\overline{X}_2 + b \Rightarrow -1 = \frac{5}{2} a + b \quad \ldots (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow 4 = \left(\frac{3}{2}a - \frac{5}{2}a\right) \Rightarrow a = -4$ 1pt

De $(1) \Rightarrow b = 3 - \frac{3}{2}a = 3 + 6 = 9$

D'où $\Delta : y = -4x + 9$

5. le point d'intersection est le point $G(\overline{X}, \overline{Y}) = G(2,1)$ 1pt

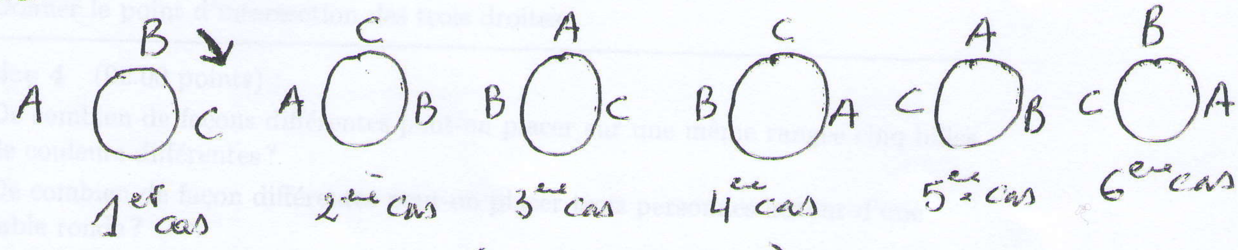
<u>EXO 4 (02,00 point)</u>

1. L'ordre est important et sans répétition (car une bille ne peut pas occuper 2 places), donc c'est une permutation sans répétition de 5 parmi 5

$P_5 = 5!$ façons $\neq$ 1pt

2. Il y a $2!$ façons $\neq$ de placer 3 personnes autour d'une table ronde. 1pt

Illustration :



<u>Mais :</u> 1^{er} cas $= 4^{ème}$ cas $= 5^{ème}$ cas, et

$2^{ème}$ cas $= 3^{ème}$ cas $= 6^{ème}$ cas

9 p