Corrigé de l'examen de Maths 03 (1

Ex1 (6pts)

1) Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^2 3^n}$ on pose $U_n = \frac{a^n}{n^2 3^n}$

pts

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2 3^{n+1}}\right| \left|\frac{n^2 3^n}{a^n}\right| = \frac{|a|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{|a|}{3}$$

si $\frac{|a|}{3} < 1$ i.e. $|a| < 1$ $\sum U_n$ cv (Critère de d'Alembert)

$\frac{|a|}{3} > 1$ i.e. $|a| > 1$ $\sum U_n$ dv

Si $|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$ on étudie séparément les 2 cas

$a = 3 \to U_n = \frac{3^n}{n^2 3^n} = \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ cv (Riemann $\alpha = 2 >$

$a = -3$ on a $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ c A $\Rightarrow$ c s

$\Rightarrow \sum U_n$ cv $\forall a \in [-3, 3]$

2) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ soit $U_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$

on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \Rightarrow \exists M > 0$ tq $\forall n \geq n_0$ $n^2 U_n \leq M$

$\Rightarrow U_n \leq \frac{M}{n^2}$ $\forall n \geq n_0$. $\Rightarrow \sum U_n$ cv

puisque $\sum_{n\geq 2} \frac{M}{n^2} = M \sum \frac{1}{n^2}$

Ex2 (6pts) $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos n}{n^p}$ on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$

$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \cos n \leq 3$. $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ i.e. $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n^p} \leq \frac{2+\cos n}{n^p} \leq \frac{3}{n^p}$

$\frac{2+\cos n}{n^p} \le \frac{3}{n^p} \Rightarrow \sum_{n\ge1} \frac{2+\cos n}{n^p}$ CV $\forall p>1$

$\frac{1}{n^p} \le \frac{2+\cos n}{n^p} \Rightarrow \sum_{n\ge1} \frac{2+\cos n}{n^p}$ dv $\forall p \le 1$

3 pts pour chaque cas.

Ex 3 (8 pts) (1+2+2+2+2)

1) $D_f = ?$

$x=0$ $f_n(x)=0 \Rightarrow \sum_{n\ge1} f_n(0)$ CV.

$x\neq0$ $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{xn^2}$ et $\sum_{n\ge1}\frac{1}{xn^2} = \frac{1}{x}\sum \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann encore.

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ CV $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$.

2) $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$ $f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$.

f_n étant ~~impaire~~ on l'étudie sur $D_E=[0\ +\infty[$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
f_n'	$+$	0	$-$
f_n	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow \sup|f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}$

$\sum_{n\ge1}\frac{1}{2n^{3/2}} = \frac{1}{2}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{3/2}}$ CV (Riemann $\alpha=\frac{3}{2}>$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$ $f_n(x) \le \frac{1}{2n^{3/2}}$ et

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ CN sur $\mathbb{R}$.

3) Continuité de f

$\sum_{n\ge1} f_n(x)$ CN sur $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n\ge1} f_n(x)$ CU $\forall x\in\mathbb{R}$

sn 4

- $\forall n$ f_n cont sur $\mathbb{R}$ (Rapport de fns continues sur $\mathbb{R}$ et $n(1+nx^2) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$)

- $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$

4) CN de $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ sur $[x_0, +\infty[$ $x_0 > 0$

on a $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1}{n(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{1}{n^3 x^4}$.

$\cancel{\text{et } \dfrac{1}{n(1+nx^2)^2} \sim \dfrac{1}{n^3x^4}}$ $\cancel{(*)}$

pour $x \geq x_0$ $n^3x^4 \geq n^3x_0^4 \Rightarrow \dfrac{1}{n^3x^4} \leq \dfrac{1}{n^3x_0^4}$

$\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3 x_0^4} = \dfrac{1}{x_0^4} \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^4}$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ CN $\forall x \geq x_0$. $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

5) a) • $(f_n)_{n\geq 1}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) • $\sum_{n\geq 1} f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $\mathbb{R}$.

c • $\sum_{n\geq 1} f_n' \xrightarrow{CU} f$ sur $[x_0, +\infty[$ car $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CN sur $[x_0$ $\forall x_0 > 0$

(a, b et c) $\Rightarrow$ f est dérivable sur $[x_0 +\infty[$ $\forall x_0 > 0$

comme f ~~est~~ impaire $\Rightarrow$ f est dérivable aussi sur $]-\infty \; -x_0]$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

comme x_0 est quelconque ds $\mathbb{R}_+^* \Rightarrow$ f est dérivab

$\forall x \in]-\infty \; 0[\cup]0 \; +\infty[$ ie $\mathbb{R}^*$