Faculté de Technologie
$2^{ème}$ Année S T **Rattrapage de physique 03** Septembre 2011
Durée : 02 heures

Exercice 1 : Le mouvement d'un système mécanique linéaire à un degré de liberté est décrit par l'équation différentielle suivante : $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

Où x a la dimension d'un déplacement et m, β et k représentent respectivement les coefficients d'inertie (masse), de frottement fluide et d'élasticité du système. Ils ont pour valeurs : $m = 0.5\,Kg$, $\beta = 2\ Nm^{-1}s$ et $k = 12.5\ Nm^{-1}$.

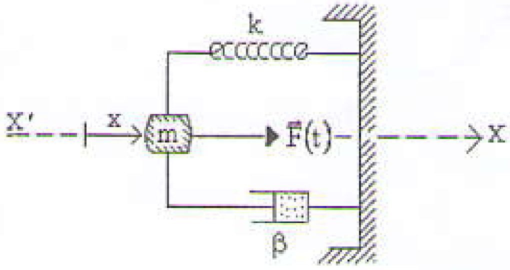
1- Ecrire l'équation différentielle ci-dessus sous une forme réduite. En déduire les expressions de la pulsation propre ω_0 et de la constante d'amortissement λ. Calculer leurs valeurs. Quelle est la nature du mouvement du système quand il est écarté de sa position d'équilibre statique.

2- Donner l'expression générale de la solution $x(t)$ de l'équation différentielle réduite. Identifier l'amplitude du mouvement du système. Comment sont déterminées les deux constantes A et φ de l'expression de $x(t)$.

3- Calculer le temps τ qu'il faut attendre, à partir de l'instant $t = 0$, pour que l'amplitude du mouvement du système devienne dix (10) fois moins élevée.

4- On remplace la masse m par une autre masse m' tout en laissant les autres éléments inchangés. Quel type de mouvement prendra le système si $m = 6.25\,m'$.

Exercice 2 : La partie mécanique d'un haut parleur peut être modélisée par le dispositif de la figure ci-contre. La masse m est reliée au bâti fixe par un ressort de raideur k et un amortisseur fluide de coefficient de frottement β. Au repos, le ressort n'est pas déformé et la masse m se trouve à



l'abscisse $x = 0$. L'entrée d'un courant électrique sinusoïdal $i(t) = I_0 \sin\Omega t$ dans le haut parleur génère une force $\vec{F}$ qui s'exerce, suivant l'axe X'X, sur son équipage mobile assimilé à une masse ponctuelle m comme illustré à la figure ci-dessus. La force $\vec{F}$ est proportionnelle à l'intensité du courant électrique. Elle s'écrit : $\vec{F}(t) = K\ i(t)\ \vec{i}$ où K est une constante et $\vec{i}$ le vecteur unitaire de l'axe X'X.

1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m en introduisant le facteur de qualité Q à la place de la constante d'amortissement λ du système.

2- En partant de l'équation différentielle dans laquelle λ est remplacé en fonction de Q, déterminer la réponse forcée $x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi)$ du haut parleur en calculant les expressions de A et de φ. Pour quelle valeur Ω_r de Ω, l'amplitude A est-elle maximale (résonance).

3- Exprimer β en fonction de m et k pour que le facteur de qualité Q du système soit égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner, dans ce cas la valeur de Ω_r. Calculer alors la bande passante $\Delta\Omega$ du haut parleur. Donner l'allure du graphe de $A(\Omega)$.

<u>**Barème :**</u> **Exercice 1 : 08 points** **Exercice 2 :12 points**

Solutions des exercices de l'examen de Rattrapage de physique 03 Septembre 2011

Exercice1 :

1- Forme réduite : $\boxed{\ddot{x}+\frac{\beta}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0}$ 0,5 Pulsation propre : $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ 0,5

Constante d'amortissement : $\boxed{\lambda=\frac{\beta}{2m}}$ 0,5 Valeurs numériques : $\boxed{\omega_0=5\ s^{-1}}$ 0,5 et $\boxed{\lambda=2\ s^{-1}}$ 0,5

$\lambda \prec \omega_0$, le système acquiert un mouvement oscillatoire faiblement amorti. 0,5

2- Le système étant faiblement amorti, la solution $x(t)$ s'écrit :

$\boxed{x(t)=Ae^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\ t+\varphi\right)}$ 0,5 Amplitude : $\boxed{Ae^{-\lambda t}}$ 0,5

A et φ sont des constantes déterminées par les $\boxed{\text{conditions initiales du système}}$ 0,5

3- $\boxed{Ae^{-\lambda\tau}=\frac{Ae^{-\lambda\times 0}}{10}=\frac{A}{10}}$ 0,5 $\boxed{\tau=\frac{\ln 10}{\lambda}}$ 0,5 $\boxed{\tau=1.15\ s}$ 0,5

4-On calcule $\boxed{\lambda'=\frac{\beta}{2m'}=6.25\frac{\beta}{2m}=6.25\,\lambda=12.5\ s^{-1}}$ 0,5

$\boxed{\omega_0'=\sqrt{\frac{k}{m'}}=\sqrt{6.25\frac{k}{m}}=2.5\ \omega_0=12.5\ s^{-1}}$ 0,5 $\boxed{\lambda'=\omega_0'}$ 0,5, $\boxed{\text{le système devient à régime critique}}$. 0,5

Exercice 2 :

1- Les énergies potentielle et cinétique du système sont données respectivement par : $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ et $E_c=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Le Lagrangien associé au mouvement de la masse m s'écrit :

$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$

La puissance dissipée par frottement fluide est donnée par : $D=\frac{1}{2}\beta\dot{x}^2$

En utilisant l'équation de Lagrange on établit l'équation différentielle du mouvement de la masse m:

$\boxed{m\ddot{x}+\beta\dot{x}+kx=F(t)=KI_0\sin\Omega t}$ 1

Sous la forme réduite, elle s'écrit :

$\boxed{\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{KI_0}{m}\sin\Omega t}$ 1 Le facteur de qualité Q du système est défini par : $\boxed{Q=\frac{\omega_0}{2\lambda}}$ 0,5

D'où : $\boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{KI_0}{m}\sin\Omega t}$ 0,5

2- La représentation complexe des différents grandeurs sinusoïdales de l'équation différentielle permet d'écrire :

$$\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)Ae^{j(\Omega t+\varphi)}+j\frac{\omega_0}{Q}\Omega Ae^{j(\Omega t+\varphi)}=\frac{KI_0}{m}e^{j\Omega t}$$

D'où : $\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+j\frac{\omega_0}{Q}\Omega\right]A=\frac{KI_0}{m}e^{-j\varphi}=\frac{KI_0}{m}\left(\cos\varphi-j\sin\varphi\right)$

On établit ainsi les deux équations réelles :

$$\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)A=\frac{KI_0}{m}\cos\varphi$$

$$\frac{\omega_0}{Q}\Omega=-\frac{KI_0}{m}\sin\varphi$$

Ces deux équations permettent d'accéder à :

$\boxed{A(\Omega)=\frac{KI_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}}$ 1,5 et $\boxed{tg\varphi=-\frac{1}{Q}\frac{\Omega}{\omega_0}\frac{1}{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}}$ 0,5

La pulsation de résonance est calculée à partir de l'équation : $\boxed{\frac{dA}{d\Omega}=0}$ 0,5

Soit : $2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(-\frac{2\Omega}{\omega_0^2}\right)+\frac{2\Omega}{Q^2\omega_0^2}=0$ D'où : $\boxed{\Omega=\Omega_r=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$ 1 pulsation de résonance.

3- A partir de : $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\omega_0}{2\lambda}=\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{m}{\beta}$ On obtient : $\boxed{\beta=\sqrt{2km}}$ 1 et $\boxed{\Omega_r=0}$ 0,5

Bande passante : $\boxed{A(\Omega)=\frac{A(\Omega_r)}{\sqrt{2}}}$ 0,5 Donc $\frac{KI_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{KI_0}{m\omega_0^2}$

Soit : $\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)=0$ qui admet comme solution : $\boxed{\Omega_1=\omega_0}$. 1

La bande passante est définie par l'intervalle des pulsations Ω telles que : $\frac{KI_0}{m\omega_0^2}\geq A(\Omega)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{KI_0}{m\omega_0^2}$.

Les pulsations de la bande passante sont donc celles appartenant à l'intervalle $\boxed{[0,\omega_0]}$. 1

La largeur de la bande passante est donc :

$\boxed{\Delta\Omega=\omega_0}$. 0,5