

Examen de Probabilités et Statistiques

Exercice 1 (09.00 points) : On considère la répartition de 50 garçons suivant deux caractères : la taille X (en Cm) et le poids Y (en Kg).

X/Y	60	70	80	90
160	2	5	4	1
170	2	8	9	4
180	n_{31}	4	6	5

1. Préciser le type du tableau de données. Calculer n_{31} et donner sa signification.
2. Déterminer les deux distributions marginales.
3. Déterminer la distribution de $X/Y = 70$. Calculer sa moyenne et sa variance.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Justifier.
5. Donner le centre de gravité du nuage de points.
6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Commenter.
7. Déterminer les équations des deux droites de régression.
8. Quel est le poids d'un garçon de taille 175 Cm.
9. Quel sera la taille d'un garçon ayant un poids de 82 Kg.

On donne : $\sum_{i=1}^3 n_{i0} x_i = 8530$, $\sum_{i=1}^3 n_{i0} x_i^2 = 1457900$, $\sum_{j=1}^4 n_{0j} y_j = 3850$,

$\sum_{j=1}^4 n_{0j} y_j^2 = 300300$ et $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 n_{ij} x_i y_j = 657800$.

Exercice 2 (07.00 points) : Les œufs obtenus dans un élevage de poules ont été pesés et la fonction de répartition de la variable représentant le poids des œufs est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 155; \\ 0.0032x - 0.496, & 155 \leq x \leq 160; \\ 0.0168x - 2.672, & 160 \leq x \leq 165; \\ 0.066x - 10.79, & 165 \leq x \leq 170; \\ 0.1x - 16.57, & 170 \leq x \leq 175; \\ 0.14x - 1.52, & 175 \leq x \leq 180; \\ 1, & x \geq 180. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de $F(x)$.
2. Définir la population étudiée, l'unité statistique, le caractère étudié et sa nature.
3. Donner la distribution de cette variable et sa représentation graphique.
4. Calculer le mode, la médiane et l'intervalle interquartile.
5. Déterminer la fréquence d'œufs ayant un poids compris entre 162 et 172.

NB : Il est demandé à l'étudiant de choisir un seul exercice parmi les deux suivants.

Exercice 3 (04.00 points) : Une urne contient 8 boules blanches, 3 vertes et 5 rouges. On tire 4 boules simultanément.

1. Donner le nombre de tirages possibles.
2. Quelle est la probabilité de tirer 4 boules de même couleur.
3. Quelle est la probabilité qu'une et une seule couleur ne figure pas parmi les boules tirées.
4. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge au moins soit tirée.

Exercice 4 (04.00 points) : On a mesuré le poids (en Kg) de 100 étudiants d'une faculté universitaire. La variable statistique considérée est continue et le nombre d'étudiants ayant un poids inférieur à x est donné dans le tableau suivant :

Poids	45	55	65	75	80
Nombre d'étudiants ayant un poids $< x$	0	15	85	95	100

1. Dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.
2. Tracer le graphe de la variable considérée et déduire le mode.
3. Calculer la moyenne et l'écart type de cette distribution.
4. Que deviendraient la moyenne et l'écart type des tailles des étudiants, si chaque étudiant a grossi :
 - (i) d'1 Kg.
 - (ii) de 5% de chaque poids.

Bon courage

Exercice 1: (09. Pts)

1) Le tableau est un tableau de contingence. (0,25)

X \ Y	60	70	80	90	$n_{i.}$
160	2	5	4	1	12
170	2	8	9	4	23
180	0	4	6	5	15
$n_{.j}$	4	17	19	10	50

$$n_{32} = 15 - 4 - 6 - 5 = 0$$

$$n_{32} = 0$$

(0,25)

n_{32} = signifie qu'il y a aucun (0) garçon ayant une taille de 180 et un poids égale à 60. (0,5)

2) Distribution Marginales:

Selon X:

(0,5)

X	160	170	180	Total
$n_{i.}$	12	23	15	50

Selon Y:

(0,5)

Y	60	70	80	90	Total
$n_{.j}$	4	17	19	10	50

3) Distribution conditionnelle $X|Y=70$:

$X Y=70$	160	170	180	Total
n_{i2}	5	8	4	17

(0,5)

(0,5)

$$\bar{X}_{Y=70} = \frac{1}{17} (5 \times 160 + 8 \times 170 + 4 \times 180) = 169,4118$$

$$\Rightarrow \bar{X}_{Y=70} = 169,4118$$

$$V(X|Y=70) = \frac{1}{17} (5 \times 160^2 + 8 \times 170^2 + 4 \times 180^2) - (169,4118)^2 = 52,5832$$

$$V(X|Y=70) = 52,5832$$

(0,5)

4) Calculer le centre de gravité $G(\bar{X}, \bar{Y})$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 n_{i.} x_i = \frac{1}{50} (8530) = 170,6$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^4 n_{.j} y_j = \frac{1}{50} (3850) = 77$$

$$G(\bar{X}, \bar{Y}) = (170,6, 77)$$

(0,25)

(0,5)

(2)

5) X, Y sont indépendantes $\Rightarrow n_{ij} = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n} \quad \forall i, j$

$(i, j) = (3, 1)$

$$n_{31} = 0 \neq \frac{n_{3.} \times n_{.1}}{n} = \frac{15 \times 4}{50} = 1,2$$

$\Rightarrow X$ et Y sont indépendantes.

0,5

6) Coefficient de corrélation :

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 n_{ij} x_i y_j - \bar{X} \bar{Y} = \frac{657800}{50} - (170,6)(77)$$

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = 19,8} \quad (0,25)$$

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 n_{i.} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1457900}{50} - (170,6)^2 = 53,64$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{53,64} = 7,32$$

$$\boxed{\sigma_X = 7,32} \quad (0,25)$$

$$V(Y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^4 n_{.j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = \frac{250300}{50} - (77)^2 = 77$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{77} = 8,77$$

$$\boxed{\sigma_Y = 8,77} \quad (0,25)$$

$$\text{Donc } r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{19,8}{7,32 \times 8,77} = 0,3082 \quad (0,25)$$

$r = 0,3082$ donc il y a une faible liaison $(0,5)$ linéaire entre X et Y .

7) Equation de la droite de régression de Y en X :

$$Y = aX + b$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{19,8}{53,64} = 0,369 \quad (0,25)$$

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 77 - (0,369)(170,6) = 14,031 \quad (0,25)$$

$$Y = 0,369 X + 14,03 \quad (0,25)$$

Equation de la droite de regression de X en Y.

$$X = \alpha Y + \beta$$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(Y)} = \frac{19,8}{77} = 0,257 \quad (0,25)$$

$$\beta = \bar{X} - \alpha \bar{Y} = (170,6) - (0,257)(77) = 150,803 \quad (0,25)$$

$$X = 0,257 Y + 150,803 \quad (0,5)$$

8) Le poids du garçon de taille $x = 175$ est

$$y_0 = 0,369 \times 175 + 14,03 = 78,624$$

$$y_0 = 78,624 \quad (0,75)$$

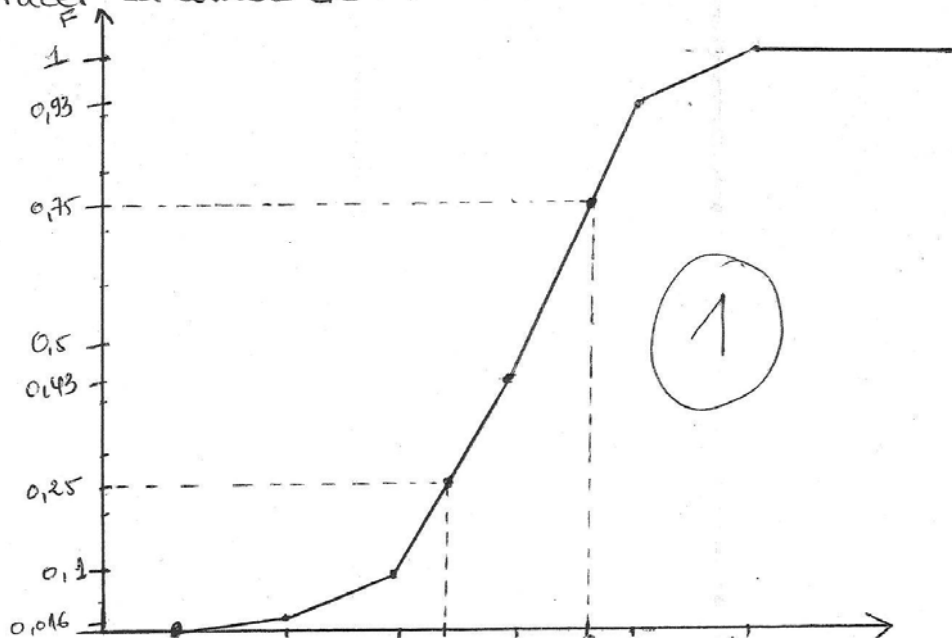
9) la taille du garçon de poids $y = 82 \text{ kg}$ est

$$x_0 = 0,257(82) + 150,803 = 171,8822$$

$$x_0 = 171,8822 \quad (0,75)$$

Exercice 9:

1) Tracer la courbe de F.



2) Nature de la variable étudiée.

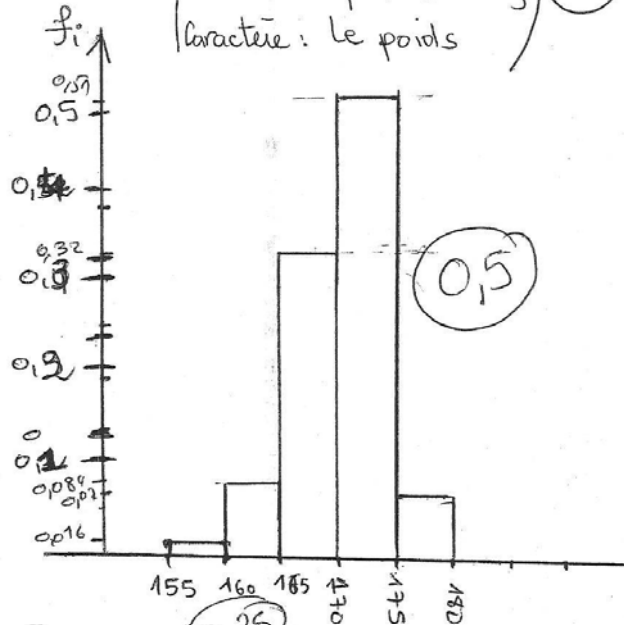
La fonction de répartition étant continue sur \mathbb{R} , la variable est alors quantitative continue.

Population: Les oeufs
Unité statistique: un oeuf
Caractère: le poids

1

3) Distribution Statistique:

classe	f_i	F_i
[155, 160[0,016	0,016
[160, 165[0,084	0,1
[165, 170[0,32	0,42
[170, 175[0,51	0,93
[175, 180[0,07	1
Total	1	/



4) Mode: classe modale est [170, 175[

$$M_o = 170 + 5 \frac{0,19}{0,19 + 0,44} = 171,5079$$

$$M_o = 171,5079$$

Mediane: classe médiane est [170, 175[

$$M_e = 170 + 5 \frac{0,5 - 0,42}{0,51} = 170,7843$$

$$M_e = 170,7843$$

$$Q_1: Q_1 \in [165, 170[\quad Q_1 = 165 + 5 \frac{0,25 - 0,1}{0,32} = 167,34375$$

$$Q_1 = 167,34375$$

$$Q_3: Q_3 \in [170, 175[\quad Q_3 = 170 + 5 \frac{0,75 - 0,42}{0,51} = 173,2553$$

$$Q_3 = 173,2553$$

5) La fréquence d'oeufs de poids entre 162 et 172 est

$$= F(172) - F(162) = [0,1 \times 172 - 16,57] - [0,0168 \times 162 - 2,672]$$

$$= 0,63 - 0,0496 = 0,5804$$

$$\Rightarrow F = 0,5804$$

Corrige de l'examen de Maths 04
Probabilités et statistiques

Exercice 1 : (4 Pts)

1) Le Nombre de tirages possibles est C_{16}^4 (0,5)

2) A : "tirer 4 boules de même couleur".

$$\text{Card}(A) = C_8^4 + C_5^4 \Rightarrow P(A) = \frac{C_8^4 + C_5^4}{C_{16}^4} \quad (0,5)$$

3) B : "Une couleur ne figure pas"

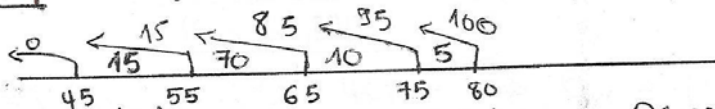
$$\text{Card}(B) = C_8^4 + C_{13}^4 + C_{11}^4 \Rightarrow P(B) = \frac{C_8^4 + C_{13}^4 + C_{11}^4}{C_{16}^4} \quad (0,5)$$

4) B : "Au moins une rouge".

\bar{B} : Aucune rouge.

$$\text{Card}(\bar{B}) = C_{11}^4 \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{C_{11}^4}{C_{16}^4} \Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{11}^4}{C_{16}^4} \quad (0,5)$$

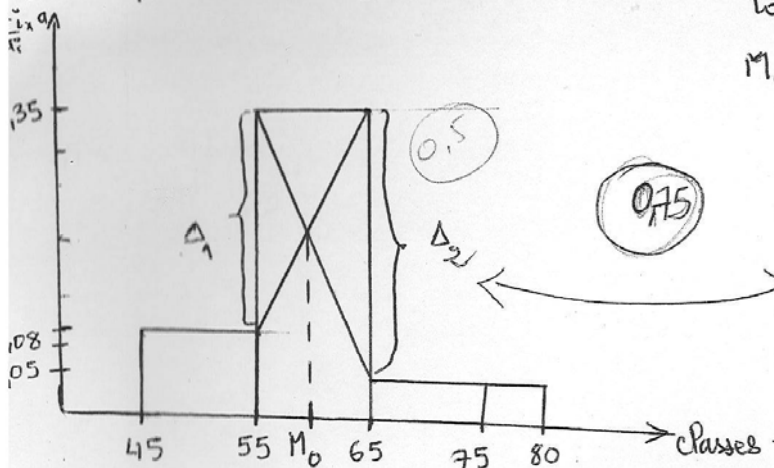
Exercice 4 : (4 Pts)



1) Le Tableau Statistique : On prend $h = \text{PGCD}(a_i) = 5$.

Classes	N_i	n_i	C_i	f_i	F_i	a_i	$\frac{f_i}{n_i} \times a$	$n_i \times c_i$	$n_i \times c_i^2$
[45, 55[15	15 - 0 = 15	50	0,15	0,15	10	0,08	750	37500
[55, 65[85	85 - 15 = 70	60	0,70	0,85	10	0,35	4200	252000
[65, 75[95	95 - 85 = 10	70	0,10	0,95	10	0,05	700	49000
[75, 80[100	100 - 95 = 05	77,5	0,05	1	05	0,05	387,5	30031,25
Total	/	100	/	1	//	//	//	6037,5	368531,25

2) Représentation graphique:



L'histogramme.

Mode:

la classe modale est $[55, 65]$

$$M_0 = e_{i-1} + a_i \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$= 55 + 10 \frac{0,27}{0,27 + 0,3}$$

$$= 59,74$$

$$M_0 = 59,74$$

0,25

3) calcul de \bar{x} et σ_x :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 n_i x_i = \frac{6037,5}{100} = 60,375$$

$$\bar{x} = 60,375 \quad (0,25)$$

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{368531,25}{100} - (60,375)^2 = 40,77$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{40,77} = 6,38$$

$$\sigma_x = 6,38 \quad (0,25)$$

i) si chaque étudiant a grossi d'1 kg.

$$\bullet) x'_i = x_i + 1 \Rightarrow \bar{x}' = \bar{x} + 1 = 60,375 + 1 = 61,375$$

$$\bar{x}' = 61,375 \quad (0,5)$$

$$\bullet) V(x') = V(x+1) = V(x) = 40,77 \Rightarrow \sigma_{x'} = \sqrt{V(x')} = 6,38$$

$$\sigma_{x'} = 6,38 \quad (0,5)$$

ii) si chaque étudiant a grossi de 5% de chaque poids.

$$\bullet) x'_i = x_i + 5\% x_i = x_i + \frac{5}{100} x_i = 1,05 x_i = a x_i \quad (a = 1,05)$$

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 n_i x'_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 n_i a x_i = a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 n_i x_i = a \bar{x}$$

$$\bar{x}' = 1,05 (60,375) = 63,39$$

$$\bar{x}' = 63,39 \quad (0,5)$$

$$\bullet) V(x') = V(ax) = a^2 V(x) = (1,05)^2 V(x) = (1,05)^2 (40,77) = 44,95$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'} = \sqrt{V(x')} = \sqrt{44,95} = 6,70$$

$$\sigma_{x'} = 6,70 \quad (0,5)$$