Université A. Mira
Dpt : ST $2^{ième}$ année licence

20/02/10

Examen du module de Maths 3

Exercice 1 (1,5 pts) :

Etudier la convergence de la série suivante :

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots$$

Exercice 2(4 pts) :

Etudier la série de terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$.

Exercice 3 (6 pts) :

Etudier la convergence simple, la convergence uniforme de la suite d'applications suivante :

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2} \qquad n \geq 1\,,\ \ x \in \mathrm{R}$$

Exercice 4 (7 pts) :

Soit $U_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \quad \forall\,(n,x) \in N\text{x}R$

1. Soit a > 0.Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général $U_n(x)$ Sur [a, + ∞[.Cette série est-elle normalement convergente sur R_+ ?
2. Soit U, sa limite. Montrer que la fonction U est continue sur R_+^*
3. Montrer que la fonction U est dérivable sur R_+^* etque sa dérivée est donnée par :

$$\forall\ x\ \in R_+^* \qquad u'(x) = -\sum_{n\geq 0}\sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}$$

4. Que se passe t-il si $x < 0$

Exercice 5 : (1,5 pts) : Au choix 1) ou 2)

1) Déterminer le domaine de convergence de la série suivante:

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+3n+2)x^n$$

2) Etudier la convergence de la série de terme général U_n = Arctang ($\frac{1}{1+n+n^2}$) et calculer sa somme.

Ind : Arctang ($\frac{a-b}{1+ab}$) = Arctang (a) - Arctang (b)

Corrigé

Ex1 (1,5)

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \cdots$$

0,5 $= \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ et $\displaystyle\frac{1}{2n(2n+1)} \underset{0,5}{\sim} \frac{1}{4n^2}$

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV car c'est une série de Riemann $\alpha = 2 > 1$

0,5

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ CV

Ex2 (4,5) $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin n}$

$U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{\sin n}{n}}\right) \underset{0,5}{=} \dfrac{(-1)^n}{n}\left(1+\dfrac{\sin n}{n}\right)^{-1}$ $\underset{0,5}{\dfrac{\sin n}{n} \longrightarrow 0}$, $n \to +\infty$

$\Rightarrow U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\left(1 - \dfrac{\sin n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ 0,5

$= \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ 0,5

* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ CV car c'est une série alternée avec $\frac{1}{n} \searrow 0$
* $\sum \dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2}$ CA car $\left|\dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}\sin n$ CV
* $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV. 0,5

$\Rightarrow \displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ CV.

Ex3 $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{n+x^2} \quad n \geq 1 \quad x \in \mathbb{R}$.

* C.S

si $x = 0$ $\quad f_n(x) = 0$ $\quad$ 0,5

si $x = 0$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ 0,5

$\Rightarrow$ $f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

0,5

C.U (1,5)

$f_n \xrightarrow{CU} f = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - 0| < \varepsilon$

on étudie la fonction f_n

on remarque que f_n est impaire on l'étudie donc sur $[0, +\infty[$

$$f_n'(x) = \frac{n + x^2 - 2x^2}{(n+x^2)^2} = \frac{n - x^2}{(n+x^2)^2} \quad 0{,}5$$

$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{n}$ 0,5

x	0		$\sqrt{n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\sqrt{n})$	$\searrow$	0

1

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \leq f_n(\sqrt{n})$ 0,5

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$ $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur $\mathbb{R}$.

1pt

Ex 4 (7pts)

1.a) $(a>0)$

$x \geq a \implies x\sqrt{n} \geq a\sqrt{n} \implies -x\sqrt{n} \leq -a\sqrt{n}$

$\implies e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$

et $e^{-a\sqrt{n}}$ est le t.g d'une serie CV

en effet : $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-a\sqrt{n}} = 0 \implies \exists M>0 \text{ tq } e^{-a\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\implies \sum e^{-a\sqrt{n}}$ CV $\implies \sum_{n\geq 0} e^{-x\sqrt{n}}$ CN sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

1b) CN sur $\mathbb{R}_+$

pour $x=0$ $e^{-x\sqrt{n}} = e^0 = 1 \not\to 0$

0,5

$\implies \sum e^{-x\sqrt{n}}$ dv pour $x=0 \implies \sum e^{-x\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$

2. soit $U = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} e^{-x\sqrt{k}}$

0,5 $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CN sur $[a,+\infty[\implies \sum_{n\geq 0} U_n(x)$ CU sur $[a,+\infty[$

et les U_n sont cont sur $[a,+\infty[\implies U$ est cont sur $[a,+\infty[$ $\forall a>0$

0,5

et comme la serie dv pour $x=0$

0,5 $U(x) = \sum U_n(x)$ est cont sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Etudions la CU de la serie derivée sur $\mathbb{R}_+^*$

soit $\left(-\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}\right)$ $x>0$

on a : $\lim_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} = 0 \implies \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV $\implies \sum \sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

$\implies -\sum \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ CU sur $\mathbb{R}_+^*$

les : U_n sont dériv sur $\mathbb{R}_+^*$

1 . $\sum U_n$ $\underline{cv}$; u sur " $\Rightarrow$ $\left(\sum U_n\right)' = \sum U_n'$

. $\sum U_n'$ cu " "

où $U'(x) = -\sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$

si $x < 0$ $e^{-x\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty$ $\Rightarrow$ $\sum U_n(x)$ div

0,5

Ex 5 (1,5)

1) $n^2+3n+2 \sim n^2$ et $\frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$

0,5 $\Rightarrow R_c = 1$

0,5 si $x = 1$ $\sum (n^2+3n+2)$ div. car $n^2+3n+2 \longrightarrow +\infty$

0,5 si $x=-1$ $\sum (n^2+3n+2)(-1)^n$ div car $(-1)^n(n^2+3n+2) \not\longrightarrow 0$ (n'a pas de limite)

$\Rightarrow D_c =]-1, 1[$.

2). $U_n = \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n^2+n} = \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n(n+1)} = \text{Arctg}\, n+1 - \text{Arctg}\, n$

0,5 on a : $a = n+1$ et $b = n$

0,5 $\text{Arctg}\, \frac{1}{1+n^2+n} \sim \text{Arctg}\, \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ au $V(+\infty)$

$\sum \frac{1}{n^2}$ cv. $\Rightarrow$ $\sum \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n+n^2}$ cv

calculons sa somme $S = \sum_{n\geq 0} \text{Arctg}\, \frac{1}{1+n+n^2}$

0,5 $S = \lim_{n\to+\infty} \left(\text{Arctg}\, 1 - \text{Arctg}\, 0 + \cancel{\text{Arctg}\, 2} - \cancel{\text{Arctg}\, 1} + \dots + \text{Arctg}\, n+1\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} \text{Arctg}\, n+1 = \frac{\pi}{2}$

* On peut prendre aussi $a = \frac{1}{n}$ et $b = \frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow$ $\frac{a-b}{1+ab} = \frac{1}{1+n^2+n}$