$\sqrt{\text{Maths 06}}$

Université A.MIRA — Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Technologie — 2ième Année

® 2011–2012

♣— Examen Final d'Analyse Numérique —♣

Exercice 1 :
Soit l'équation suivante, où x est donné en radian :

$$F(x) = x - 1 + \sin(2x). \tag{1}$$

1. Tracer le graphe de F dans l'intervalle $I = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
2. Montrer que l'équation (1) admet une racine unique α sur l'intervalle I.
3. Pour $x_0 = \frac{1}{4}$, écrire la suite de Newton.
4. Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.
5. Calculer les quatre premières itérations, avec quatre chiffres significatifs. Conclure.
6. Montrer que l'on a $|x_3 - \alpha| \leq 1.6 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 (06.00 points) :
On considère la matrice A et le vecteur b suivants :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \alpha & -\frac{1}{4} - \alpha \\ \alpha & \frac{3}{2} & \alpha \\ -\frac{1}{4} & \alpha & \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelle valeur de α la matrice A est symétrique définie positive ?
2. Pour cette valeur de α, donner la décomposition LU.
3. Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant cette décomposition.
4. Déduire la solution X du système $AX = b$.

Exercice 3 (06.00 points) :
Le système linéaire $AX = b$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_2 + 2\,x_1 - \,x_3 = 1, \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\,x_3 + x_2 = 1. \end{cases}$$

1. La méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ?
2. Si oui, calculer $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ en partant de $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

La rédaction claire et rigoureuse est exigée !

Bon Courage
✓ *Mr Boualem*

Corrigé de l'examen Final
Maths 06 — Année 11/12

Exercice N° 1 :
(08,00 pts)

$$F(x) = x - 1 + \sin(2x)$$

1°) le graphe de F :

On a : $F(1/4) = -0,2706$

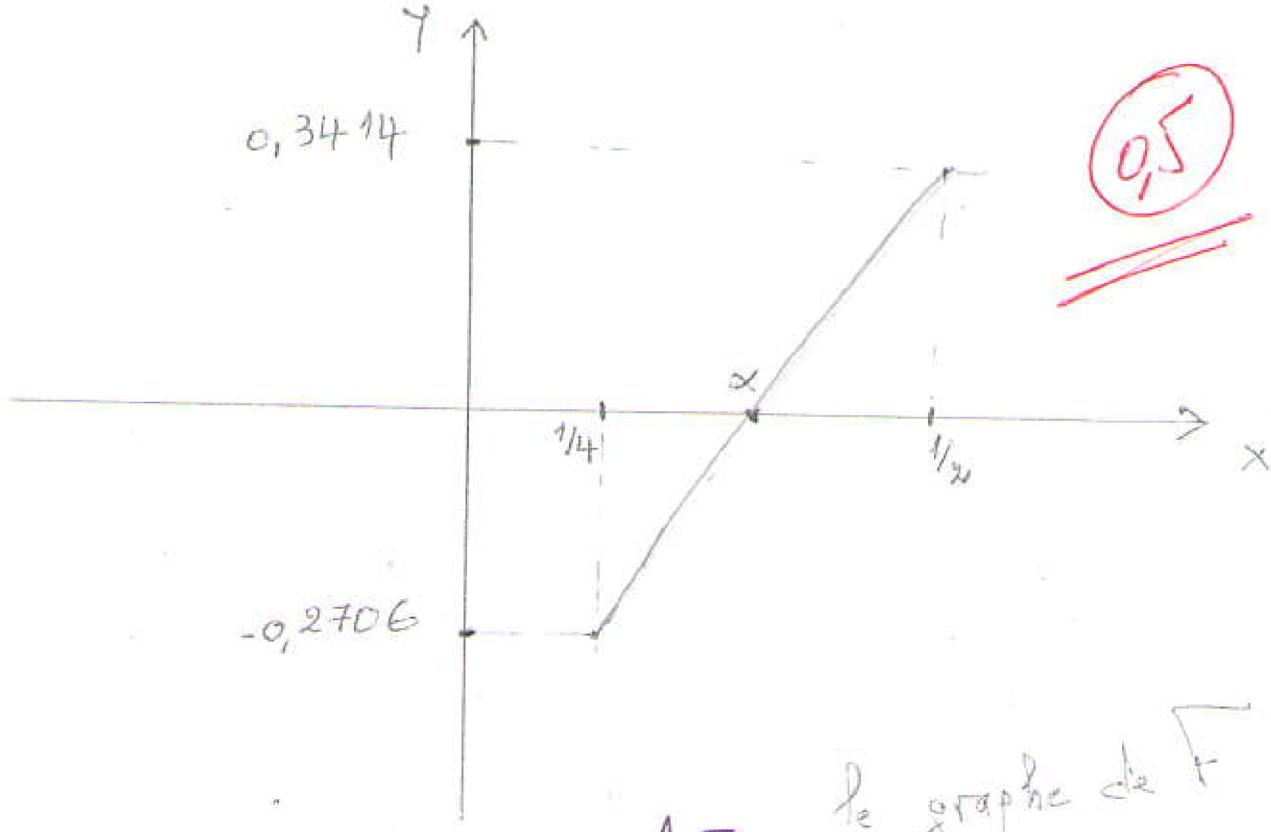
$F(1/2) = 0,3414$

x	$1/4$		$1/2$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$-0,2706$	$\nearrow$	$0,3414$

0,5

$$F'(x) = 1 + 2\cos(2x) > 0, \quad \forall x \in I = \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right]$$

Car $0 < \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, donc F est strictement croissante sur I.



0,5

le graphe de F

2°/ α est une racine unique sur I

- F est définie et continue sur I
- $F(1/4)F(\frac{1}{2})<0$ (voir φ_1)

$\}$ • Il existe au moins une racine de $]1/4, \frac{1}{2}[$

- De plus $F'(x) = 1 + 2\cos(2x) > 0 \quad \forall x \in I$ (voir φ_1)

alors F est strictement croissante

1

D'où la racine α est unique sur I.

3°/ La suite de Newton:

1

$$\begin{cases} x_0 = 1/4, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - 1 + \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)} = \dfrac{1 + 2x_n\cos(2x_n) - \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)}. \end{cases}$$

4°/ les conditions d'application: sur I

- $F \in \mathcal{C}^2(I)$, car F est composée de polynôme et d'une fonction trigonométrique les deux de $\mathcal{C}^2$
- $F(1/4)F(1/2) < 0$ (voir φ_1)
- $F'(x) = 1 + 2\cos(2x) \neq 0$
- $F''(x) = -4\sin(2x) \neq 0$

1

Car: $0 < 1/2 \leq 2x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$

- $x_0 = 1/4$ donné par hypothèse et $(F(1/4)F''(1/4) > 0)$.

Alors la suite de Newton (voir φ_3) converge vers la racine unique α sur I.

5°/ $$\begin{cases} x_0 = 1/4 \\ x_{n+1} = \dfrac{1 + 2x_n \cos(2x_n) - \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour $n = 0$:

$$x_1 = 0,3483 \quad = 0,5$$

Pour $n = 1$

$$x_2 = 0,3522 \quad = 0,5$$

Pour $n = 2$

$$x_3 = 0,3524 \quad = 0,5$$

Pour $n = 3$

$$x_4 = 0,3524 \quad = 0,5$$

Conclusion : $\alpha = x_3 = 0,3524$ à 10^{-4} (4 chiffres).

$= 0,5$

6°/ L'inégalité $|x_3-\alpha| \leq 1,6 \times 10^{-4}$?

D'après le cours, on a

1,5

- $|x_3-\alpha| \leq \dfrac{M}{2m}|x_3-x_2|$

- $M = \underset{x\in I}{\mathrm{Max}}\left\{|F''(x)|\right\} = \underset{x\in I}{\max}\left\{4\sin(2x)\right\} = 4\sin 1$

$$M = 4\sin(1) = 3,3659.$$

- $m = \underset{x\in I}{\mathrm{Min}}\left\{|F'(x)|\right\} = \underset{x\in I}{\mathrm{Min}}\left\{1+2\cos(2x)\right\}$

$$= 1+2\cos(1) = 2,0806$$

Remarque :

- $x \longmapsto 4\sin(2x)$ est strictement croissante sur I.
  $x \longmapsto 1+2\cos(2x)$ est strictement décroissante sur I.

le Résultat Final :

- $|x_3-\alpha| \leq \dfrac{3,3659}{2(2,0806)}|0,3524 - 0,3522| = 1,6 \times 10^{-4}$.

Mr Boudaoud

Exercice N°2 : (06,00 pts)

1. A est symétrique si $A = A^t$ $(a_{ij} = a_{ji})$

En effet :

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} = \alpha \\ a_{23} = a_{32} = \alpha \\ a_{13} = -\frac{1}{4} - \alpha \overset{?}{=} a_{31} = -\frac{1}{4} \text{ ssi } \alpha = 0 \end{cases}$$

0,5

Pour cette valeur de α la matrice A est symétrique

Dans ce cas la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} 9/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}$$

0,75

• $\Delta_1 = |A_{[1]}| = \frac{9}{4} > 0$, • $\Delta_2 = |A_{[2]}| = \frac{27}{8}$, • $\Delta_3 = |A| = \frac{15}{2} > 0$

2. Comme chaque $\Delta_i > 0$, $\forall i$ alors $\Delta_i \neq 0$ 0,25

D'où $A = LU \iff$

$$\begin{bmatrix} 9/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \iff$$

Après multiplication et identification, on aura :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} 9/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{9} \end{bmatrix}$$

0,5 0,5

3. L'inverse de A par LU:

0,5 • Comme $\det(A) = \frac{15}{2} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe, donc d'après Boualem

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AV_1 = e_1 \\ AV_2 = e_2 \\ AV_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} LUV_1 = e_1 \\ LUV_2 = e_2 \\ LUV_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} LY_1 = e_1 \\ UV_1 = Y_1 \end{cases} & (\mathrm{I}) \\ \begin{cases} LY_2 = e_2 \\ UV_2 = Y_2 \end{cases} & (\mathrm{II}) \\ \begin{cases} LY_3 = e_3 \\ UV_3 = Y_3 \end{cases} & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

0,5

De (I):

- $LY_1 = e_1 \Leftrightarrow Y_1 = (1, 0, \frac{1}{9})^t$
- $UV_1 = Y_1 \Leftrightarrow V_1 = (9/20, 0, \frac{1}{20})^t$ 0,5

De (II):

- $LY_2 = e_2 \Leftrightarrow Y_2 = (0, 1, 0)^t$
- $UV_2 = Y_2 \Leftrightarrow V_2 = (0, 2/3, 0)^t$ 0,5

De (III):

- $LY_3 = e_3 \Leftrightarrow Y_3 = (0, 0, 1)^t$
- $UV_3 = Y_3 \Leftrightarrow V_3 = (1/20, 0, \frac{9}{20})^t$ 0,5

De (I), (II), (III), on aura le résultat final

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9/20 & 0 & \frac{1}{20} \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1/20 & 0 & 9/20 \end{bmatrix}$$

4. La solution X :

$$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b \Leftrightarrow X = (1, 2, 3)^t.$$ 1 pt

Exercice N° 3 (06,00 pts)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

1°] La Convergence de Gauss-Seidel

Remarque: Comme la matrice A n'est pas à DDS alors on peut rien dire de la Convergence de G_S.

Pour cela, on va voir du coté de rayon spectral!

En posant:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; (0{,}25), \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \; (0{,}25), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; (0{,}25)$$

La matrice de Gauss-Seidel s'écrit: $G_S = (D-E)^{-1} F$

$$D - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (0{,}25)$$

Comme $\det(D-E) = 8 \neq 0$ alors $(D-E)^{-1}$ existe, et (0,5)

$$(D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -1/8 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (0{,}5)$$

$$G_S = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1/8 & 1/8 \end{bmatrix} \quad 0{,}5$$

∴ Calcul de $\rho(G_S)$:

$$P_{G_S}(\lambda) = \det(G_S - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/4-\lambda & -3/4 \\ 0 & 1/8 & 1/8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{3}{8}\lambda + \frac{1}{8}\right) = 0 \quad 0{,}5$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \quad 0{,}25 \\ \lambda^2 - 3/8\,\lambda + 1/8 = 0 \Rightarrow \Delta = -\frac{23}{64} = \frac{23}{64} i^2 \quad 0{,}25 \end{cases}$$

$$\text{Comme } \Delta = \frac{23}{64} i^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{3}{16} - i\frac{\sqrt{23}}{16} \quad 0{,}25 \\ \lambda_3 = \frac{3}{16} + i\frac{\sqrt{23}}{16} \quad 0{,}25 \end{cases}$$

D'où:

$$\rho(G_S) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{4\sqrt{2}}{16} = 0{,}35$$

Comme $\rho(G_S) = 0{,}35 < 1$ alors méthode de Gauss-Seidel Converge. 0,5

2. Calcul de $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$:

La méthode de G_S s'écrit :

0,5 =
$$\begin{cases} X^{(0)} = (0, 0, 0)^t \\ X^{(k+1)} = G_S X^{(k)} + (D-E)^{-1} b, \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pour $k=0$:

$$X^{(1)} = G_S X^{(0)} + (D-E)^{-1} b = \left(1/2 , 1/4 , 3/8 \right)^t$$

= 0,5

Pour $k=1$:

$$X^{(2)} = G_S X^{(1)} + (D-E)^{-1} b = \left(9/16 , \frac{1}{32} , 29/64 \right)^t$$

= 0,5

Fin de L'examen Maths 06

Mr BOUALEM