Maths 04

Université A.MIRA — Béjaïa
Faculté de Technologie
Département de Technologie — 2ième Année

Ⓡ 2011–2012

♣— Examen de Rattrapage de probabilités et Statistiques —♣

Exercice 1 (06.00 points) : On donne la distribution de N logements d'un immeuble collectif selon leurs superficies X (en m^2) :

Superficie X	$[0,40[$	$[40,80[$	$[80,120[$
Effectif	4	n_2	6

1. Compléter le tableau sachant que la superficie moyenne est de 64 m^2.
2. Représenter graphiquement cette distribution. Calculer son mode.
3. Comment s'appelle la valeur α de X telle que $F(\alpha) = 1 - F(\alpha)$, F étant la fonction de répartition de X. Calculer α.
4. Calculer la variance ($V(X)$) et l'écart type (σ_X) de cette distribution.
5. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes. Calculer la médiane.
6. Déterminer la proportion de logements dont la superficie est inférieure à $\overline{X} + \sigma_X$.

Exercice 2 (06.00 points) : Le tableau suivant donne la distribution conjointe de deux variables indépendantes X et Y.

X/Y	0	20	30	50	$f_{i\bullet}$
1					
2					0.55
$f_{\bullet j}$	0.1		0.4	0.2	

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Déterminer les deux distributions marginales de X et de Y.
3. Déterminer la distribution de $X/Y = y_2$ et calculer sa variance.
4. Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y.
5. Donner le coefficient de corrélation linéaire. Conclure.

Exercice 3 (08.00 points) : On a mesuré la résistance thermique d'un isolant de doublage de murs. Les mesures effectuées pour plusieurs épaisseurs de l'isolant ont donné les résultats suivants.

Epaisseur x_i de l'isolant (en mm)	311	411	511	611	711	811	911	1011
Résistance thermique y_i	1.96	2.25	2.65	3	3.3	3.7	4.02	4.38

1. Représenter le nuage de points (X, Y) ainsi que le centre de gravité.
2. On pose $z_i = \frac{x_i - 11}{10}$. Calculer $\overline{Z}$, $V(Z)$ et déduire $\overline{X}$ et $V(X)$.
3. Considérons la série $(z_i)_{i=\overline{1,8}}$ de Médiane Me.
   ▷ Partager le nuage de points en deux sous-nuages : l'un contient les points (z_i, y_i) tel que $z_i < Me$, l'autre contient les points (z_i, y_i) tel que $z_i > Me$.
   ▷ Calculer les points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces deux nuages respectivement.
   ▷ Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points G_1 et G_2.
4. Quelle serait la résistance obtenue avec une épaisseur d'isolant de 1211 mm ?

Bon Courage
✓ *Mr Boualem*

Corrigé de l'examen de Rattrapage

- Maths 04 - (2011 - 2012).

Ex 01 $\frac{06}{06}$

classes	n_i	f_i	a_i	x_i	$F_i \nearrow$	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
[0,40[	4	0,2	40	20	0,2	80	1600
[40,80[	n_2=10	0,5	40	60	0,7	600	36000
[80,120[	6	0,3	40	100	1	600	60000
Total	20	1	/	/	/	1280	97600

0,5

① Calcul de n_2 :

On a $N = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + n_2 + 6 = 10 + n_2$

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_i x_i = \frac{1}{10+n_2}\left(4\times 20 + n_2 \times 60 + 6\times 100\right) = 64$$

$$\Leftrightarrow 80 + 60 n_2 + 600 = 64(10+n_2) = 640 + 64 n_2$$

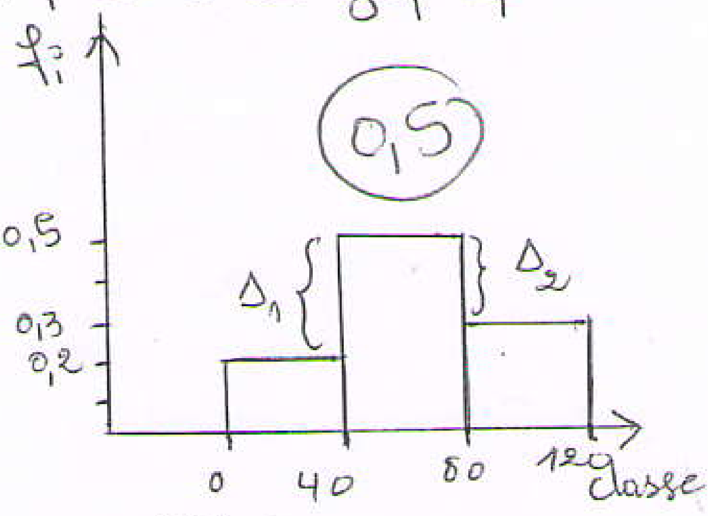
$$\Leftrightarrow 680 + 60 n_2 = 640 + 64 n_2$$

$$\Leftrightarrow 64 n_2 - 60 n_2 = 680 - 640$$

$$\Leftrightarrow 4 n_2 = 40 \Leftrightarrow n_2 = \frac{40}{4} = 10 \Rightarrow \boxed{n_2 = 10} \quad \boxed{N = 20}$$

0,5 0,5

②) Représentation graphique



Histogramme.

Mode : la classe Modale est [40,80[0,75

$$M_o = e_{i-1} + a_i \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

$$\Delta_1 = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

$$\Delta_2 = 0,5 - 0,3 = 0,2$$

$$M_o = 40 + 40\left(\frac{0,3}{0,3+0,2}\right) = 64$$

$$\boxed{M_o = 64}$$

3- La valeur α est appelée Médiane de X et notée Me

$M_e \in [40, 80[$

$$M_e = e_{i-1} + \frac{a_i}{f_i}\left(\frac{1}{2} - F_{i-1}\uparrow\right) = 40 + \frac{40}{0{,}5}\left(\frac{1}{2} - 0{,}2\right) = 64\ m^2$$

0,75

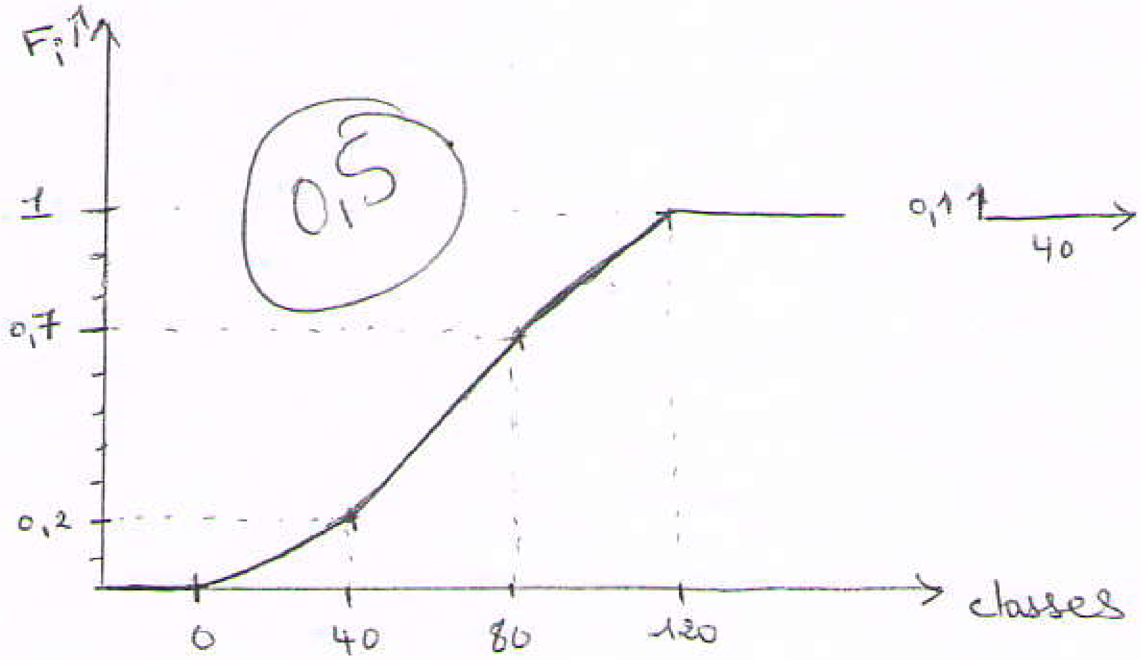
4- La variance $V(x)$ et l'écart type σ_x :

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 4880 - (64)^2 = 784$$ $\boxed{V(x) = 784}$

<u>L'écart type</u> : $\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{784} = 28$

0,5

5- Tracer la courbe cumulative



courbe cumulative croissante.

La Médiane : $M_e = \alpha = 64\ m^2$ 0,5

6- La proportion de logements dont la superficie est inférieure à $\bar{X} + \sigma_X$ est donnée par $F(\bar{X} + \sigma_x)$ où F est la fonction de répartition de X.

D'après la courbe cumulative ~~précédente~~ on déduit que

$$F(\bar{x} + \sigma_x) = F(92) = 1$$ 1

<u>Remarque</u> : On peut utilise l'expression explicite de la fonction de répartition F pour calculer $F(\bar{x} + \sigma_x)$.

2

Exo2 : 06/06

1. X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow f_{ij} = f_{i.} \times f_{.j} \quad \forall i = \overline{1,2} \quad \forall j = \overline{1,4}$

Comme la somme des fréquences Marginales est égale à 1 $\left(\sum_{i=1}^{2} f_{i.} = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{4} f_{.j} = 1 \right)$, alors :

$f_{1.} = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$

$f_{.2} = 1 - (0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}2) = 0{,}3$

et

$f_{11} = f_{1.} \times f_{.1} = (0{,}45)(0{,}1) = 0{,}045$

$f_{12} = f_{1.} \times f_{.2} = (0{,}45)(0{,}3) = 0{,}135$

$f_{13} = f_{1.} \times f_{.3} = (0{,}45)(0{,}4) = 0{,}18$

$f_{14} = f_{1.} \times f_{.4} = (0{,}45)(0{,}2) = 0{,}09$

$f_{21} = f_{2.} \times f_{.1} = (0{,}55)(0{,}1) = 0{,}055$

$f_{22} = f_{2.} \times f_{.2} = (0{,}55)(0{,}3) = 0{,}165$

$f_{23} = f_{2.} \times f_{.3} = (0{,}55)(0{,}4) = 0{,}22$

$f_{24} = f_{2.} \times f_{.4} = (0{,}55)(0{,}2) = 0{,}11$

Le tableau de contingence est

1,5

X \ Y	6	20	30	50	$f_{i.}$	
1	0,045	0,135	0,18	0,09	0,45	$= f_{1.}$
2	0,055	0,165	0,22	0,11	0,55	$= f_{2.}$
$f_{.j}$	0,1	0,3	0,4	0,2	1	
	$= f_{.1}$	$= f_{.2}$	$= f_{.3}$	$= f_{.4}$		

2- Déterminer les deux distributions Marginales

a) Selon X

x_i	$f_{i.}$
1	0,45
2	0,55
Total	1

0,5

Selon Y

y_j	$f_{.j}$
0	0,1
20	0,3
30	0,4
50	0,2
Total	1

0,5

3. Distribution Conditionnelle de $X / Y = y_2 = 20$

x_i	$f_{i/2}$	$f_{i/2} x_i$	$f_{i/2} x_i^2$
1	0,135	0,135	0,135
2	0,165	0,5 0,33	0,66
Total	0,3	0,465	0,795

La Variance Conditionnelle :

$$V(X_2) = \sum_{i=1}^{2} f_{i/2} x_i^2 - \bar{X}_2^2$$

La Moyenne Conditionnelle :

$$\bar{X}_2 = \sum_{i=1}^{2} f_{i/2} x_i = 0,465$$

0,5

D'où $V(X_2) = -(0,465)^2 + 0,795 = 0,795 - 0,216\,23 = 0,578\,77$

4. Droite de Régression de X en Y

$(\Delta) : X = \alpha Y + \beta$ avec $\begin{cases} \alpha = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(Y)} \\ \beta = \bar{X} - \alpha \bar{Y} \end{cases}$

$$\bar{Y} = \sum_{j=1}^{4} f_{.j} y_j = 28$$

$$V(y) = \sum_{j=1}^{4} f_{.j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = 980 - (28)^2 = 196.$$

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{2} f_{i.}\, x_i = 1{,}55$$

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} f_{ij}\, x_i y_j - \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$= (2.7 + 5.4 + 4.5 + 6.6 + 13.2 + 11) - (1.55)(28)$$

$$= 43.4 - 43.4 = 0 \qquad 0{,}5$$

$$\alpha = \frac{0}{196} = 0$$

$$\beta = 1.55 - (0)(28) = 1{,}55$$

$$(\Delta) : X = 1.55$$

1

5. Coefficient de corrélation ρ_{xy} :

* Première Méthode :

Comme les deux variables X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, D'où $\rho_{xy} = 0$.

* Deuxième Méthode :

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad 1$$

$\overline{X} = 1{,}55$, $\overline{Y} = 28$, $V(Y) = 196$, $\sigma_Y = \sqrt{196} = 14$

$V(X) = \sum_{i=1}^{2} f_{i.}\, x_i^2 - \overline{X}^2 = 2{,}65 - (1{,}55)^2 = 0{,}24$, $\sigma_X = \sqrt{0{,}24} = 0{,}489$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

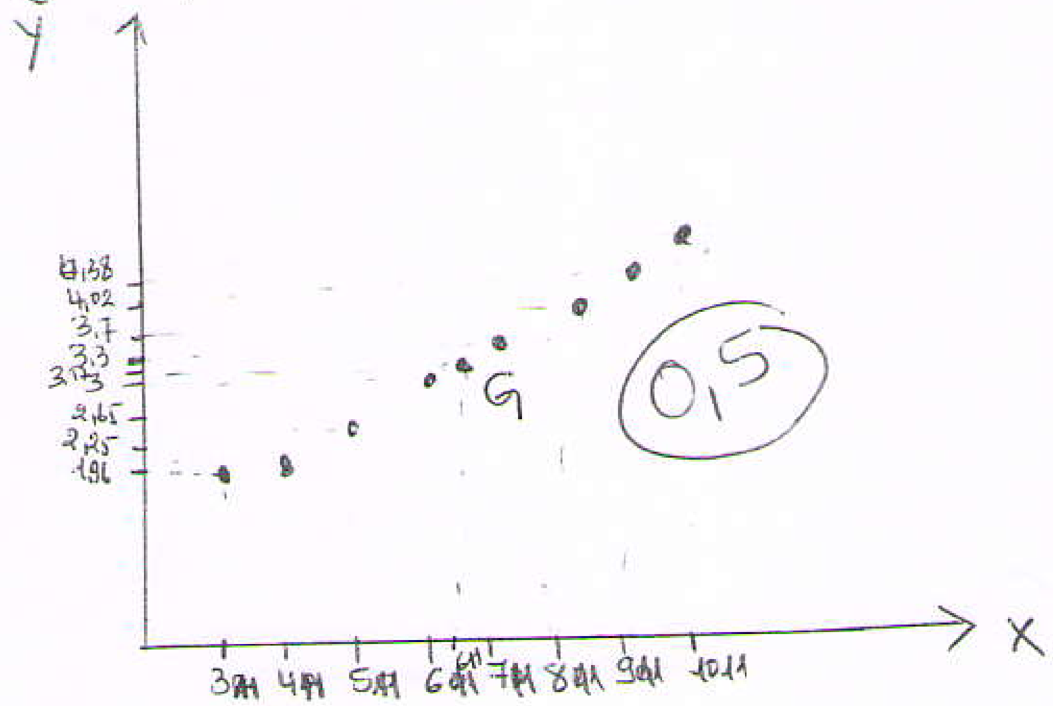
$\Rightarrow \rho_{xy} = 0$, la liaison entre X et Y est nulle, car les deux variables sont indépendantes.

P 5

Exo 3 : $\frac{08}{08}$

x_i	311	411	511	611	711	811	911	1011
y_i	1.96	2,25	2,65	3	3.3	3.7	4.02	4.38

1- Le nuage de points :



0,5

Le centre de gravité

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{8}(5288) = 661$ 0,5

$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{8} y_i = \frac{1}{8}(25.26) = 3.1575$ 0,5

Donc, $G(\bar{X}, \bar{Y}) = G(661, 3.1575)$.

) On pose $z_i = \frac{x_i - 11}{10}$

x_i	311	411	511	611	711	811	911	1011
z_i	30	40	50	60	70	80	90	100

0,5

P 6

Calculer $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i = \frac{520}{8} = 65$$ 0,5

La Variance :

$$V(Z) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i^2 - (\bar{Z})^2 = \frac{38000}{8} - (65)^2 = 4750 - 4225$$

$$V(Z) = 525.$$ 0,5

Déduire $\bar{X}$ et $V(X)$:

On a $z_i = \frac{x_i - 11}{10} \Rightarrow x_i = 10 z_i + 11$

donc $\bar{X} = 10\bar{Z} + 11 = 10.(65) + 11 = 650 + 11 = 661$

$V(X) = V(10 Z_i + 11) = 10^2 V(Z) = 100 (525) = 52500$ 0,5

•) Partage du Nuage de points :

soit la Série $(z_i)_{i=\overline{1,8}}$ de Mediane M_e.

n : est paire $n = 2p = 2 \times 4 \Rightarrow p = 4$

$$M_e = \frac{x_p + x_{p+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{60+70}{2} = 65$$ 0,5

On construit les deux sous ensembles E_1 et E_2.

$E_1 = \{(z_i, y_i) \text{ tq } z_i < M_e\} = \{(30, 1.96), (40, 2.25), (50, 2.65), (60, 3)\}$ 0,5

et

$E_2 = \{(z_i, y_i) \text{ tq } z_i > M_e\} = \{(70, 3.3), (80, 3.7), (90, 4.02), (100, 4.38)\}$. 0,5

•) Calcul de G_1 et G_2 :

$*\ G_1 = (\bar{Z}_1, \bar{Y}_1) = (?, ?)$

$$\bar{Z}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} z_i = \frac{1}{4}(180) = 45$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} y_i = \frac{1}{4}(9{,}86) = 2{,}465$$

Donc $G_1(\bar{X}_1, \bar{Y}_1) = G_1(45, 2.465)$ 0,5

* $G_2(\bar{Z}_2, \bar{Y}_2) = (?, ?)$

$$\bar{Z}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} z_i = \frac{1}{4}(340) = 85$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = \frac{1}{4}(15.4) = 3.85.$$

Donc $G_2(\bar{Z}_2, \bar{Y}_2) = (85, 3.85)$. 0,5

* L'équation de la droite passant par G_1 et G_2 (Droite de Mayer)

$G_1 \in (M) \Rightarrow \bar{Y}_1 = a\bar{Z}_1 + b \Rightarrow 2.465 = 45a + b$ ...(1)

$G_2 \in (M) \Rightarrow \bar{Y}_2 = a\bar{Z}_2 + b \Rightarrow 3.85 = 85a + b$ ...(2)

$$(2)-(1) \Rightarrow a = \frac{3.85 - 2.465}{85 - 45} = \frac{1.385}{40} = 0.034$$

Dans (2) :

$$b = 3.85 - 85(0.034) = 0{,}96$$

L'equation de la droite de Mayer est

$$(M) : Y = aZ + b$$

$$Y = 0{,}034\,Z + 0{,}96$$ 1

P 8

4 - La résistance obtenue avec une épaisseur d'isolant de 1211 mm est.

$$x_i = 1211 \Rightarrow z_i = \frac{x_i - 11}{10} = \frac{1211 - 11}{10} = 120$$

$$\boxed{z_i = 120}$$

$$(M) : y = 0,034\, z + 0,96 = 0,034\,(120) + 0,96 = 5.04$$

$$\boxed{y = 5.04}$$

1