Université A. Mira de Béjaia **Année 2012/2013**
Faculté de Technologie – 2ème Année Technologie –
MATH VI : Travaux Pratiques -Analyse Numérique

TP 5&6 (02 séances)
RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINAIRES – METHODES DIRECTES –

BUT : On considère le système d'équations linéaires : $[A]\{X\}=\{b\}$

Où $\boldsymbol{A}$ est une matrice carrée de dimension $\boldsymbol{n\times n}$, $\boldsymbol{b}$ est un vecteur de dimension $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{X}$ est le vecteur des inconnues de dimension $\boldsymbol{n}$ également.

On se propose de résoudre le système par une méthode directe.

I- Méthode de Gausse : (Une séance)

L'algorithme pour rendre une matrice A d'ordre n triangulaire supérieure est donné par :

$$\begin{array}{l}
\text{Pour } i=1,n\text{-}1 \\
\quad \text{Pour } k=i+1,n \\
\qquad P=A_{k,i}/A_{i,i} \\
\qquad \text{Pour } j=i,n \\
\qquad\quad A_{k,j}=A_{k,j}\text{-}P\times A_{i,j} \\
\qquad b_k=b_k\text{-}b_i\times P
\end{array} \qquad \text{(I-1)}$$

L'algorithme de résolution du nouveau système obtenu $\tilde{A}X=\tilde{b}$, où $\tilde{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, est donné par :

$$\begin{array}{l}
\text{Pour } i=n,1 \\
\quad X_i=\tilde{b}_i/\tilde{A}_{i,i} \\
\quad \text{Pour } j=1,i\text{-}1 \\
\qquad \tilde{b}_j=\tilde{b}_j\text{-}\tilde{A}_{j,i}\times X_i
\end{array} \qquad \text{(I-2)}$$

Ecrire un programme script Matlab qui permet de lire une matrice A et un vecteur b puis appelle une fonction ***GaussG***** (ajouter le nom de ton groupe à ***Gauss***, exp : ***GaussGM1***) pour la triangularisation de A en utilisant l'algorithme (I-1). Cette fonction reçoit les arguments d'entrée A et b et retourne la matrice triangulaire A_m et le vecteur modifié b_m. Le programme appelle ensuite une autre fonction ***ResolG***** (ajouter le nom de ton groupe à ***Resol***, exp : ***ResolGM1***) pour la résolution du système $A_m X=b_m$ en utilisant l'algorithme (I-2). Cette fonction reçoit les arguments d'entrée A_m et b_m et retourne le vecteur solution X.

Application : $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

Préparation théorique (Obligatoire) :
Calculer, par la méthode de Gauss, la matrice triangulaire supérieure de la matrice précédente. Trouver alors la solution X.

II- Méthode de Cholesky : (Une séance)

On se propose de résoudre le problème $Ax = b$ avec A matrice symétrique définie positive de taille n. La méthode de Cholesky consiste à décomposer la matrice A en $A = L \times L^t$, où L est une matrice triangulaire inférieure de même dimension que A .

II-1 Algorithme de décomposition :

Afin d'obtenir les éléments L_{ij} de la matrice L, on multiplie les matrices L et L^t, puis on identifie les coefficients respectifs dans l'égalité $A = L \times L^t$ pour obtenir les équations :

$$\begin{aligned} &\text{pour } i = 1, n \\ &\quad L_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{i,k}^2} \\ &\quad \text{pour } j = i+1, n \\ &\qquad L_{j,i} = \frac{1}{L_{i,i}} \left[a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right] \end{aligned} \qquad \text{(II-1)}$$

II-2 Résolution du système Ax = b

La résolution du système $AX = b$ revient à résoudre : $AX = b \Leftrightarrow LL^t X = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b \\ L^t X = Y \end{cases}$

D'où on obtient : $$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{b_1}{L_{1,1}} \\ Y_i = \dfrac{1}{L_{i,i}} \left[b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} L_{i,j} Y_j \right] \ ; \ i = 2, n \end{cases} \qquad \text{(II-2)}$$

Et $$\begin{cases} X_n = \dfrac{Y_n}{L_{nn}^t} \\ X_i = \dfrac{1}{L_{i,i}^t} \left[Y_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} L_{i,j}^t X_j \right] \ ; \ i = n-1, 1 \end{cases} \qquad \text{(II-3)}$$

II-3- Manipulation

a- Ecrire un programme script Matlab qui permet de lire une matrice A et un vecteur b puis appelle la fonction **ChoG**** pour la décomposition de A en utilisant l'algorithme (II-1). Cette fonction reçoit comme argument d'entrée la matrice A et retourne la matrice L.

b- Résoudre les systèmes : $L.Y=b$ en utilisant l'algorithme (II-2) et $L^t.X=Y$ via l'algorithme (II-3).

Application : $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$; $X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$; $b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

II-4 Préparation théorique (Obligatoire) :

- Vérifier si la matrice A est SDP
- Donner la décomposition de *Cholesky* de la matrice A puis résoudre le système.