TP 07 : RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINAIRES – METHODES ITERATIVES –

(Une séance)

1- OBJECTIFS DU TP

Le but de ce projet est d'expliquer les méthodes itératives applicables à la résolution de systèmes linéaires à plusieurs inconnues $[A]\{x\}=\{b\}$.

Nous allons étudier deux méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires ; la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel.

La matrice *A* qui est une matrice diagonale strictement dominante est décomposée en : *A* = *M* – *N*, de telle façon que *M* soit inversible. Il est ensuite possible d'écrire le système $Ax=b$ sous la forme :

$$Ax=b \Rightarrow (M-N)x=b \Rightarrow Mx=Nx+b$$

Où encore :

$$x = M^{-1}N.x + M^{-1}b$$

qui définit une équation de point fixe.

Pour résoudre cette dernière nous calculerons par récurrence la suite des vecteurs $x^{(i)}$ à partir d'un vecteur $x^{(0)}$, en choisissant la relation indiquée ci-dessous :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}N.x^{(k)} + M^{-1}b$$

Cette relation est une relation de récurrence du premier ordre.

Les décompositions de la matrice ***A*** font intervenir la matrice diagonale ***D***, la matrice triangulaire inférieure –***E*** et la matrice triangulaire supérieure –***F***, avec :

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad -E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & 0 \end{bmatrix} \qquad -F=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Nous posons donc *A* = *D* – *E* – *F*, et nous obtiendrons la décomposition *A* = *M* – *N* à partir de différents types de regroupements des matrices *D*, –*E* et –*F*, ce qui va nous amener aux méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

2- Méthode de Jacobi (Une sénace)

On suppose que A est une matrice inversible tel que $a_{ii} \neq 0, \forall i$. On pose : *A* = *D* – *E* – *F*, nous obtenons alors la relation suivante :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b \qquad \textbf{(2-1)}$$

<u>L'algorithme de Jacobi s'écrit aussi:</u>

$$\begin{cases} x_i^{(0)} \text{ donné (approximation initiale)} \\ \\ x_i^{(k+1)} = -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \dfrac{b_i}{a_{ii}} \end{cases} \qquad \textbf{(2-2)}$$

Ecrire un fichier script Matlab qui permet de calculer la solution *X* <u>en utilisant l'algorithme **(2-2).**</u>

Application numérique

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$

Calculer les trois premières itérations $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, i = 1, 2, 3$ en utilisant le programme précédent avec : $x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

3- Méthode de Gausse–Seidel :

La relation de récurrence pour cette méthode est :

$$(D - E)x^{(k+1)} = F.x^{(k)} + b \qquad \textbf{(3-1)}$$

- Ecrire un programme script Matlab permettant de calculer la solution du système linéaire $Ax = b$ en utilisant la relation **(3-1)** avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ -11 \end{Bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Arrêter les calculs lorsque : $maximum\left(\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|\right) \leq \varepsilon = 10^{-6}$

4- REMARQUE SUR LA CONVERGENCE

Si *A* est une matrice strictement dominante, la méthode itérative est convergente.

Définition d'une matrice dite à diagonale strictement dominante : $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i$

5- PREPARATION THEORIQUE (OBLIGATOIRE) :

- Ecrire un programme Matlab (fichier script) permettant de calculer la solution du système linéaire $Ax = b$ en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel **(3-1)** (données : *A*, *b*, *x*0 et *ε*).