ANALYSE DE DONNÉES
L2 - COMMUNICATION

Fiche Travail Dirigé

Rappels mathématiques (partie 1)

Cette fiche constitue un rappel des principaux concepts et opérations dont nous nous servirons tout au long de ce cours. Cette fiche est la première partie de deux séries de rappels, le deuxième est pour sa part consacré aux calculs des probabilités, elle se trouve dans le Cours portant sur l'Échantillonnage.

Première Partie

En prérequis, la théorie de l'ensemble des nombres.

Rappel Mathématiques & Statistiques

1 Règles élémentaires de calcul

Soient x, y et z trois nombres réels ($x, y, z \in \mathbb{R}$). Les règles suivantes s'appliquent :

La commutativité. Quels que soient les nombres réels x et y,

$$x + y = y + x \quad \text{et} \quad xy = yx$$

L'associativité. Quels que soient les nombres réels x, y et z,

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{et} \quad x(yz) = (xy)z$$

La distributivité. Quels que soient les nombres réels x, y et z,

$$(x + y)z = xz + yz$$

Les éléments neutres. Quel que soit le nombre réel x :

$$x + 0 = x \quad \text{et} \quad x \times 1 = x$$

2 Sommation & Produit

2.1. Sommation

$\sum$ se lit **Sigma**, c'est la majuscule de la lettre grecque S.

Exemples

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$$

Remarque

- L'expression de sommation $\sum_{i=k}^{n} x_i$ peut s'écrire aussi de cette manière : $\sum_{k\leq i\leq n} x_i$.
- L'indice de sommation i peut avoir n'importe quelle valeur entière (positive, négative ou nulle).
- On dit que l'indice de sommation est une **variable muette**, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre, hormis celle de départ et celle d'arrivée (i et n dans notre cas).

Quelques propriétés

Certaines propriétés s'appliquent aux signes de sommation $\sum$.

Propriété 1 : Soient k et l deux entiers tels que $k \geq l$, soient x_i et y_i pour $i = k, \ldots, l$ des réels quelconques, alors :

$$\sum_{i=k}^{l}(x_i + y_i) = \sum_{i=k}^{l} x_i + \sum_{i=k}^{l} y_i$$

Pour tout réel β,

$$\sum_{i=k}^{l} \beta x_i = \beta \sum_{i=k}^{l} x_i$$

La factorisation de la propriété précédente :

$$\sum_{i=k}^{l} (\beta x_i + \lambda y_i) = \beta \sum_{i=k}^{l} x_i + \lambda \sum_{i=k}^{l} y_i$$

Propriété de la somme et des produits : Soient n et m deux entiers naturels et x_i, y_i pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$, des nombres réels quelconques, alors :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} y_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x_i y_j$$

Les sommes téléscopiques

Soient l et k deux entiers naturels avec $k \leq l$ et x_i pour $i = k, \ldots, n$ des nombres réels quelconques, alors :

$$\sum_{i=k}^{l} (x_{i+1} - x_i) = x_{l+1} - x_k.$$

La somme d'une suite arithmétique

Pour tout entier n naturel :

$$\sum_{x=1}^{n} x = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sommes des carrés de 1 à n

Pour tout entier n naturel :

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = 1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sommes des cubes de 1 à n

Pour tout entier n naturel :

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = 1+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Les sommes doubles

Les sommes doubles ont été l'objet du chapitre portant sur l'analyse bivariée (citer le chapitre et faire un renvoi).

Dans le cas de deux entiers naturels i et j et $x_{i,j}$ des nombres réels, avec $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$, on aura la somme des $x_{i,j}$ s'écrit de la manière suivante :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} x_{i,j}.$$

Conséquence de la notation : si $n = m$, nous aurons la notation suivante :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_{i,j}.$$

Les résultats suivants dérivent de l'exploitation de la notation de la sommation double :

- Pour tous $x_{i,j}$ réels et $i, j = 1, \ldots, n$, on a :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}.$$

- La notation suivante reste valable pour tout i, j ordonnés dans un sens large :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}.$$

- Pour tout i, j ordonnés dans un sens **strict**, la notation devient :

$$\prod_{i=j}^{n} x_i = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j}.$$

2.2. Produit

Les produits sont symbolisés par le signe Π qui est la lettre P en grecque.

Nous verrons dans les lignes qui suivent son utilisation.

Soient i et j deux entiers naturels et x_i pour $i = j, \ldots, n$ des nombres réels quelconques :

$$\prod_{i=j}^{n} x_i = \begin{cases} x_j \times x_{j+1} \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La notation $\prod_{i=j}^{n} x_i$ s'écrit aussi $\prod_{j \leq i \leq n}$ et on la prononce comme suit : *produit des x_i pour i allant de j à n.*

Propriété des produits

Soient j et n deux entiers naturels, tels que $j \leq n$,
les propriétés suivantes s'appliquent pour les produits :

— Pour tout réel x,

$$\prod_{i=j}^{n} x = x \times x \times x \times \cdots \times x = x^{n-j+1}$$

— Pour tous réels x_i, $i = j, \ldots, n$ et pour tout entier s tel que $j \leq s < n$, on a :

$$\prod_{i=j}^{n} x_i = \left(\prod_{i=j}^{s} x_i\right)\left(\prod_{i=s+1}^{n} x_i\right)$$

— Pour tous réels x_i et y_i, $i = j, \ldots, n$,

$$\prod_{i=j}^{n} x_i y_i = \left(\prod_{i=j}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=j}^{n} y_i\right)$$

— Pour tous réels x_i et y_i, $i = j, \ldots, n$, tels que $y_i \neq 0$ pour tout i,

$$\prod_{i=j}^{n} x_i / y_i = \left(\prod_{i=j}^{n} x_i\right) / \left(\prod_{i=j}^{n} y_i\right)$$

— Pour tous réels x_i, $i = j, \ldots, n$ et pour tout $e \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=j}^{n} x_i^e = \left(\prod_{i=j}^{n} x_i\right)^e$$

Factorielle

Soit n un entier naturel, nous notons $n!$ (qui se lit factorielle n) l'entier naturel :

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} i & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui revient à dire :

$$0! = 1 \text{ (par convention)}$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$$

3 Intervalle de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y dans I et pour tout z dans $\mathbb{R}$, si $x \leq z \leq y$ alors z appartient à I.

Remarques

— Le fait de considérer une partie I de $\mathbb{R}$ se note $I \subset \mathbb{R}$ (qui se lit I inclus dans $\mathbb{R}$) ;
— Le fait de considérer un élément x de I se note $x \in I$ (qui se lit x appartient à I).

Il ne faut donc pas confondre le symbole $\subset$ qui est utilisé pour des parties et $\in$ qui est utilisé pour des éléments. On pourrait alors réécrire la définition précédente de cette façon : On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in I$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$, si $x \leq z \leq y$ alors $z \in I$.

Intervalle fermé et borné (segment)
Soit x et y deux réels tels que $x \leq y$. On appelle intervalle fermé et borné (appelé aussi *segment*) de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z \leq y\}.$$

Intervalle ouvert
Soit x et y deux réels tels que $x < y$. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$]x, y[= \{z \in \mathbb{R}, \quad x < z < y\}.$$

Intervalle ouvert et borné
Soit x et y deux réels tels que $x \leq y$. On appelle intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$]x, y[= \{z \in \mathbb{R}, \quad x < z < y\}.$$

Intervalle semi-ouvert et borné
Soit x et y deux réels tels que $x \leq y$. On appelle intervalle semi-ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$[x, y[= \{z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z < y\}.$$

On peut avoir aussi cette configuration :

$$]x, y] = \{z \in \mathbb{R}, \quad x < z \leq y\}.$$

Remarque :
Ce peut être aussi des ensembles de la forme :

$$]x, +\infty[= \{z \in \mathbb{R}, \quad x < z\},$$

$$]-\infty, y[= \{z \in \mathbb{R}, \quad z < y\},$$

Intervalle fermé et non borné
Soit x et y deux réels. Par convention, on appelle intervalle fermé et non borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme :

$$[x, +\infty[= \{z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z\}.$$

On peut avoir aussi cette configuration :

$$]-\infty, y] = \{z \in \mathbb{R}, \quad z \leq y\}.$$

Remarques et notations :

— On notera les intervalles particuliers suivants :
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_- =]-\infty, 0], \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[.$

— La notation $\mathbb{R}^*$ désignant les l'ensemble des $\mathbb{R}$ privé de 0.

— L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé **l'ensemble vide**, il est noté : $\emptyset$.

— L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé **singleton**. On le note alors entre accolade : $\{x\}$.

Le tableau suivant donne une classification des intervalles de $\mathbb{R}$:

Intervalles de $\mathbb{R}$	**Bornés**	**Non Bornés**
Ouverts	$]x, y[\;;\; \emptyset$	$\mathbb{R} \;;\;]-\infty, x[\;;\;]x, +\infty[$
Fermés	$[x, y] \;;\; \{x\} \;;\; \emptyset$	$\mathbb{R} \;;\;]-\infty, x] \;;\; [x, +\infty[$
Semi-ouverts	$[x, y[\;;\;]x, y]$	