Corrigé de Rattrapage Maths II : 2023/2024

Exercice 01 : (09 pts).

I. Calcul de primitives :

$$\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \ln(2-\cos x) + C \;/\; C \in \mathbb{R} \quad 01$$

(*) $\cdots \int \ln(1+x^2)\,dx$ (par parties)

Posons :

$$U(x) = \ln(1+x^2) \Rightarrow U'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$V'(x) = 1 \Rightarrow V(x) = x. \quad 0,5$$

Alors

$$(*) \Leftrightarrow \int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx.$$

$$\Rightarrow \int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx.$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

$$01$$

Alors $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\mathrm{Arctg}\,x + C \;/\; C \in \mathbb{R}$

II. On a

1) $$y' + \frac{\sin x}{2-\cos x}\,y = 0 \quad \cdots\cdots (EH).$$

La Solution générale de (EH) est donnée par :

$$y_H(x) = k\, e^{-\int \frac{\sin x}{2-\cos x}dx} \quad / k \in \mathbb{R}$$

$$= k\, e^{-\ln(2-\cos x)}$$

01,5

$$= k\, e^{\ln \frac{1}{2-\cos x}} \Rightarrow \boxed{y_H(x) = \frac{k}{2-\cos x} \; / k \in \mathbb{R}}$$

2- Détermination de α et β :

On a $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta$ une solution de (E_1).

$$y_p'(x) = -\alpha \sin x$$

0,5

Alors $$-\alpha \sin x + \frac{\sin x}{2-\cos x}(\alpha \cos x + \beta) = 2 \sin x.$$

par suite, $$\sin x\left(-\alpha + \frac{\alpha \cos x + \beta}{2-\cos x}\right) = 2 \sin x.$$

Alors $$\frac{-2\alpha + \alpha \cos x + \alpha \cos x + \beta}{2-\cos x} = 2$$

01

$$2\alpha \cos x - 2\alpha + \beta = 4 - 2\cos x$$

$\Rightarrow$ par identification : $\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ -2\alpha + \beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$ et $\boxed{\beta = 2}$

0,5

0,5

$$\boxed{y_p(x) = -\cos x + 2}$$

0,5

P2

3) La solution générale de (E_1) est donnée par :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x).$$ 02

$$\boxed{y(x) = \frac{k}{2-\cos x} - \cos x + 2 \,/\, k \in \mathbb{R}}$$

Exercice 02 (05 pts)

$$y'' + 4y' + 4y = x e^x \dots (E_2).$$

1) Résolution de l'équation homogène :

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \dots (EH).$$

L'équation caractéristique associée à (E_2) est :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \dots (EC)$$ 0,5

$\Delta = 16 - 16 = 0$ donc (EC) admet une solution double qui est $r_0 = \frac{-4}{2} = -2$ 0,5

La solution Homogène est donc donnée par :

$$\boxed{y_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}}$$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. 01

2) Détermination de α et β :

$y_p(x) = (\alpha x + \beta) e^x$ une solution de (E_2).

On a $y_p'(x) = (\alpha x + \beta) e^x + \alpha e^x = (\alpha x + \alpha + \beta) e^x.$

$$y_p''(x) = (\alpha x + \alpha + \beta) e^x + \alpha e^x$$

$y_p''(x) = (\alpha x + 2\alpha + \beta)e^x$.

on remplace y_p, y_p' et y_p'' dans (E_2), on obtient

$$(\alpha x + 2\alpha + \beta)e^x + 4(\alpha x + \alpha + \beta)e^x + 4(\alpha x + \beta)e^x = xe^x$$

$$\Rightarrow 9\alpha x + 6\alpha + 9\beta = x.$$

par identification : $\begin{cases} 9\alpha = 1 \\ 6\alpha + 9\beta = 0 \end{cases}$

0,5

alors : $\boxed{\alpha = \frac{1}{9}}$ et $\boxed{\beta = \frac{-2}{27}}$ 0,5

Par suite $\boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^x}$ 01

3) La solution générale de (E_2) :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x).$$

01

$$\boxed{y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

P4

Exercice 03 : 6 pts

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m^2 \end{pmatrix}$$

1) on a $\det A = m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & m^2 \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix}$

$$= m(m^3-1) - (m^2-m) + m(1-m^2).$$

$$= m^4 \cancel{-m} - m^2 \cancel{+m} + m - m^3$$

$$\boxed{\det A = m^4 - m^3 - m^2 + m}$$

02

d'autre part on a $m(m+1)(m-1)^2 = (m^2+m)(m^2-2m+1)$.

$$= m^4 - m^3 - m^2 + m$$

donc $\det A = m(m+1)(m-1)^2$.

2) Le valeurs de m pour lesquelles A est inversible sont

$\mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$. 01

3) $\underline{m=2}$:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $\det A = 2 \times 3 \times 1^2 = 6 \neq 0$ 0,5

donc A inversible.

$$\text{Com} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 1,5

Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ 01