Chapitre 1

Rappels Mathématiques

Dérivée d'une fonction :

Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable x à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I, sa dérivée est définie telle que :

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{1.1}$$

La dérivée partielle d'une fonction $f(x, y, \ldots)$ à plusieurs variables par rapport à l'une des variables, x par exemple, est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\delta x} \tag{1.2}$$

les autres variables sont prises comme étant des constantes.
Exemple : Calculons les dérivées partielles de la fonction $f(x, y, z) = 2x^2 y + 5\,\mathrm{yz}^3 - 12z$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4\,\mathrm{xy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 5z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 15\,\mathrm{yz}^2 - 12 \end{cases} \tag{1.3}$$

La Différentielle :

La différentielle totale d'une fonction à plusieurs variables x, y, z, … est définie par :

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{dz} + \ldots \tag{1.4}$$

Référentiel :

On appelle référentiel $\Re$, un ensemble de Npoints $(N \geq 4)$, non coplanaires, immobiles les uns par rapport aux autres, par rapport auxquels on étudie le mouvement d'un système.

Le référentiel est associé à l'observateur et à l'état de mouvement de celui-ci. Comme exemple de référentiel, on peut citer le ''*référentiel de Képler*" qui est défini par le centre du soleil et trois étoiles fixes.

Un référentiel peut être un objet fixe (comme la Terre) ou en mouvement (comme un train). Il permet de définir comment on mesure les mouvements et les positions par rapport à cet objet.

Repère :

- Un repère est un système de coordonnées qui permet de mesurer les positions des objets dans l'espace par rapport à un référentiel.
- Il est constitué de l'origine et d'axes orientés (souvent x, y, et z dans un espace tridimensionnel), permettant de définir les coordonnées d'un point.
- Le repère est utilisé pour exprimer la position ou les vecteurs associés aux objets.

Repère orthonormé :

On appelle repère orthonormé, un système d'axes orthogonaux 1, 2,3 se coupant en un point O appelé centre du repère, auxquels on associe des vecteurs unités $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$dans les directions 1, 2 et 3. Un tel repère est noté $O\vec{u}_1, \vec{u}_2\vec{u}_3$ et les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2\vec{u}_3$ forment une base. Tout vecteur peur s'exprimer sous la forme suivante :

$$\vec{V} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3 \ , \qquad (1.5)$$

où $v_i$est appelée ***''composante de*** $\vec{V}$ ***dans la direction i (i=1, 2,3)".***

Système de coordonnées :

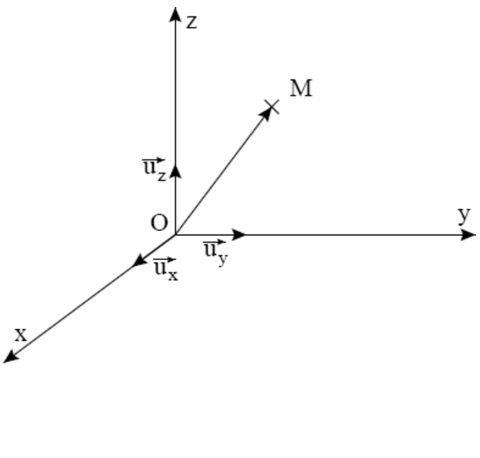
On appelle système de coordonnées à l'instant t, toute paramétrisation des points du référentiel au moyen de trois nombres réels (q_1, q_2, q_3) .

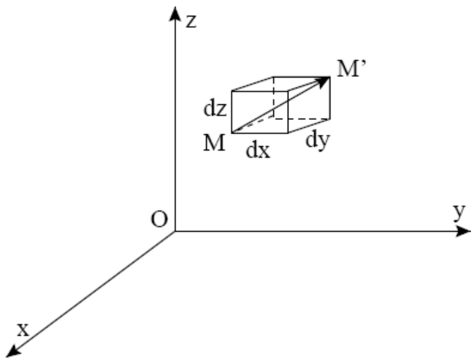
Remarque :

Pour un référentiel donné, il existe plusieurs systèmes de coordonnées.

Coordonnées cartésiennes :

Soit un point matériel M qui évolue dans un référentiel$\Re(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, il peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes(x, y, z).





Le point M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \tag{1.6}$$

$$-\infty \leq x \leq +\infty\,, \quad -\infty \leq y \leq +\infty\,, \quad -\infty \leq z \leq +\infty \tag{1.7}$$

La vitesse du point M est donnée par l'expression suivante :

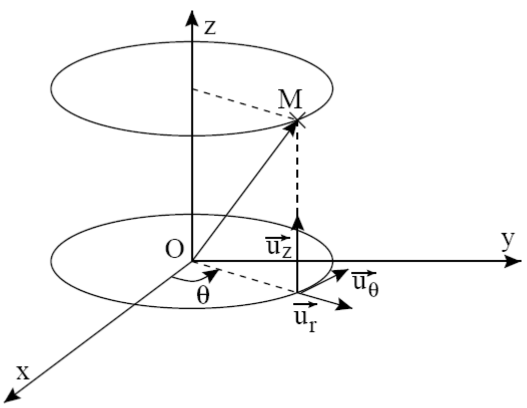
$$\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\,\vec{l}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}\,\vec{u}_z = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}. \tag{1.8}$$

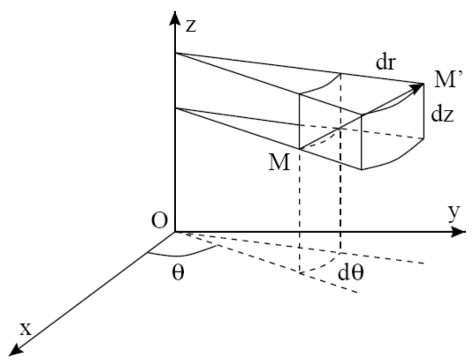
Le déplacement élémentaire vaut

$$d\,\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{dx}\,\vec{i} + \mathrm{dy}\,\vec{j} + \mathrm{dz}\,\vec{k} \tag{1.9}$$

Coordonnées cylindriques :

Le point *M* est repéré par les coordonnées cylindriques $r, , z$.





$$0 \leq r \tag{1.10}$$

Le vecteur position est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k} \tag{1.11}$$

Les coordonnées cartésiennes sont exprimées en fonction des coordonnées cylindriques telles que :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \tag{1.12}$$

Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ étant constants, après différentiation du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on trouve :

$$d\,\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \tag{1.13}$$

En utilisant les relations (1.12), on a :

$$\begin{cases} dx = dr\cos\theta - r\sin\theta\,d\theta \\ dy = dr\sin\theta + r\cos\theta\,d\theta \\ dz = dz \end{cases} \tag{1.14}$$

En remplaçant les expressions (1.14) dans celles de (1.13), on obtient :

$$d\,\overrightarrow{OM} = (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})\,dr + r\,(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})\,d\theta + dz\,\vec{k} \tag{1.15}$$

Le déplacement élémentaire vaut

$$d\,\overrightarrow{OM} = d\,\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = dr\,\vec{u}_r + r d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k} \tag{1.16}$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases} \tag{1.17}$$

On remarque que :

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \tag{1.18}$$

Donc :

$$\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_r \tag{1.19}$$

Donc, on a :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r. \tag{1.20}$$

Les trois nouveaux vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ forment une base orthonormée directe, c'est-à-dire :

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \tag{1.21}$$

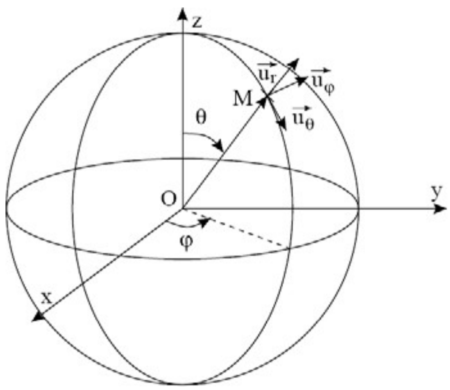
Elle est appelée base locale associée aux coordonnées cylindriques.

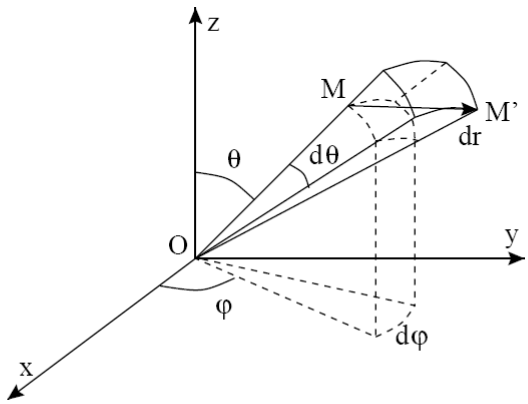
Remarque :

Lorsqu'on se place dans le plan XOY, les seules variables qui restent sont (r, θ). On les appelle « les coordonnées polaires ».

Coordonnées sphériques :

Le point M est repéré par les coordonnées cylindriques (r, θ, ϕ).





$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \tag{1.22}$$

Le vecteur position est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{u}_r \tag{1.23}$$

Les coordonnées cartésiennes sont exprimées en fonction des coordonnées sphériques telles que :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1.24}$$

En suivant la même démarche que pour les coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{dx} = \mathrm{dr}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\cos\phi\, d\theta - r\sin\theta\sin\phi\, d\phi \\ \mathrm{dy} = \mathrm{dr}\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi\, d\theta + r\sin\theta\cos\phi\, d\phi \\ \mathrm{dz} = \mathrm{dr}\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta \end{cases} \tag{1.25}$$

Le déplacement élémentaire vaut

$$d\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = d\,\vec{l} = \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \mathrm{dr}\,\vec{u}_r + \mathrm{rd}\,\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\,\vec{u}_\phi \tag{1.26}$$

où

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{j} - \sin\phi\,\vec{k} \\ \vec{u}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j} \end{cases} \tag{1.27}$$

Les trois vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ forment une base orthonormée directe, c'est-à-dire :

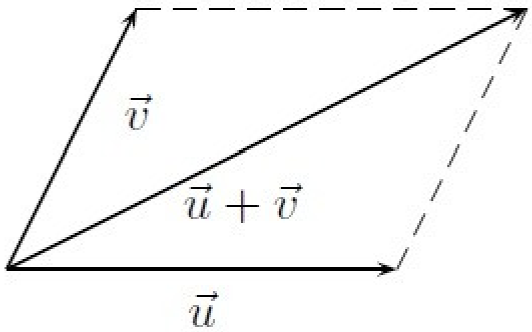
$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_\phi \tag{1.28}$$

Opérations sur les vecteurs :

Dans les applications, on distingue les **grandeurs scalaires** par opposition aux **grandeurs vectorielles**, c'est-à-dire aux vecteurs. Une grandeur scalaire est caractérisée par un seul nombre réel, alors qu'une grandeur vectorielle est caractérisée par deux ou trois nombres réels suivant que l'on se trouve dans le plan ou l'espace. Les opérations que l'on peut effectuer sur des grandeurs scalaires ne sont rien d'autre que celles que l'on peut effectuer sur les nombres réels. Par contre, on définit des opérations spécifiques aux vecteurs.

L'addition vectorielle

On définit l'**addition** ou somme de deux vecteurs$\vec{u}$ et $\vec{v}$, comme le vecteur dont les composantes sont obtenues par addition des composantes correspondantes des deux vecteurs$\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note $\overrightarrow{u+v}$ le vecteur somme.



si les deux vecteurs sont exprimés en fonction de leurs composantes telles que :

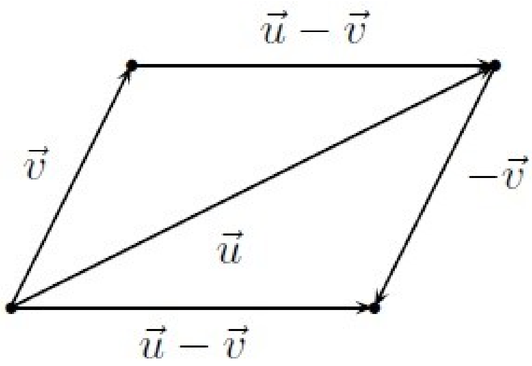
$$\vec{u}=\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

alors la somme des deux vecteur aura les composantes suivantes :

$$\overrightarrow{u+v}=\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix} u_x+v_x \\ u_y+v_y \\ u_z+v_z \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

Soustraction vectorielle :

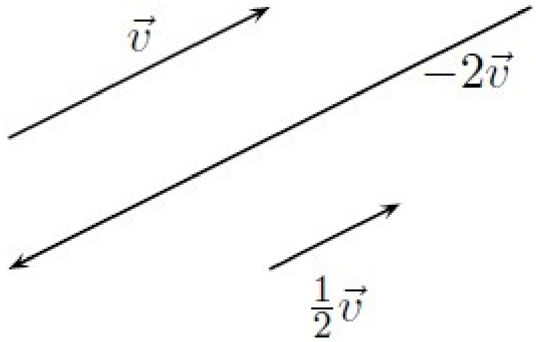
La soustraction vectorielle revient à une addition vectorielle : lorsqu'on veut soustraire le vecteur $\vec{u}$ du vecteur $\vec{v}$, on ajoute à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$, c'est-à-dire :



$$\overrightarrow{u-v}=\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=\begin{pmatrix} u_x-v_x \\ u_y-v_y \\ u_z-v_z \end{pmatrix} \qquad (1.31)$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

La multiplication d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire α, notée $\alpha\vec{v}$ est le vecteur dont les composantes sont celles de $\vec{v}$ multipliées par α,



$$\alpha\vec{v}=\begin{pmatrix} \alpha u_x \\ \alpha u_y \\ \alpha u_z \end{pmatrix} \qquad (1.32)$$

Définition :

Deux vecteurs sont ***colinéaires*** ou ***parallèles*** s'ils ont la même direction, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in R$ tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs :

Il s'agit d'une opération de multiplication entre deux vecteurs donnant comme résultat un scalaire, c'est-à-dire un nombre. Il est noté en général avec un point $\vec{u}.\vec{v}$. Dans un repère orthonormé, le **produit scalaire** de deux vecteurs est égal à la somme des produits de leurs composantes correspondantes**.**

$$\vec{u}.\vec{v}=u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z \tag{1.33}$$

On peut définir le produit scalaire d'un point de vue géométrique**.** Si θ désigne l'angle entre les deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \tag{1.34}$$

où

$$\|\vec{u}\|^2=\vec{u}.\vec{u}=u_x^2+u_y^2+u_z^2 \tag{1.35}$$

est le module du vecteur $\vec{u}$.

Le produit vectoriel de deux vecteurs :

Le ***produit vectoriel*** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1) $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$**.**
2) $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$
   (1.36)
3) les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{u}\wedge\vec{v}$ pris dans cet ordre forment un repère d'orientation directe.
4) $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$ (1.37)

En fonction des coordonnées, le produit vectoriel de deux vecteurs s'écrit comme suit :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix} u_y v_z-u_z v_y \\ u_z v_x-u_x v_z \\ u_x v_y-u_y v_x \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

Remarque :

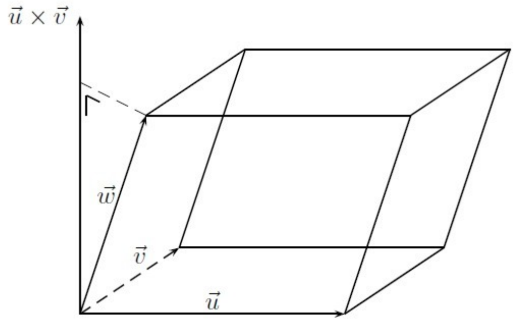
Le module $\|\vec{U}\times\vec{V}\|$ est l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Produit mixte :

Si on dispose de 3 vecteurs donnés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on peut considérer l'expression ci-dessous :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} \tag{1.39}$$

qui désigne un nombre réel, appelé *''**produit mixte**''* des 3 vecteurs. Dans un repère cartésien orthonormé, ce produit mixte donne **le volume du parallélépipède** construit avec les 3 vecteurs**.**



Dans ce qui suit nous allons voir les formules pour calculer la divergence, le gradient, le rotationnel et le laplacien scalaire et vectoriel, ainsi que les formules les reliant. Ce sont des opérateurs, comme la dérivée par exemple. Considérons un vecteur $\vec{u}$ qui peut être exprimé en fonction de ses composantes cartésiennes, tel que :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \text{ ou bien } \vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \tag{1.40}$$

ou en fonction de ses coordonnées cylindriques :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{pmatrix}, \text{ ou bien } \vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{k} \tag{1.41}$$

et en coordonnées sphériques, on aura :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{pmatrix}, \text{ ou bien } \vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_\phi \vec{e}_\phi \tag{1.42}$$

De la même manière, certains opérateurs seront eux-mêmes des vecteurs (le gradient, le rotationnel) ou des scalaires (la divergence et le laplacien). On écrira donc le gradient et le rotationnel avec un vecteur par exemple, mais la divergence sans vecteur : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$, div…

Gradient :

Le gradient d'une fonction est un vecteur qui est défini, en coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)=\vec{\nabla}(f)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

Avec l'opérateur nabla $(\vec{\nabla})$, le gradient s'exprime de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)=\vec{\nabla} f \tag{1.44}$$

En coordonnées cylindriques, son expression est la suivante :

$$\vec{\nabla} f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{1.45}$$

et en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\end{pmatrix} \tag{1.46}$$

Divergence :

La divergence est un scalaire, qui prend en argument un vecteur, elle est définie, en coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\text{div}(\vec{u})=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1.47}$$

En coordonnées cylindrique, son expression est telle que :

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(\mathrm{ru}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{1.48}$$

et en coordonnées sphériques, on a

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}. \tag{1.49}$$

On introduit un opérateur qui sera utilisé dans toutes les formules, l'opérateur nabla noté $\vec{\nabla}$ et est défini comme suit :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

Il est appliqué sur une fonction, par exemple, tel que :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

De plus, nabla étant un vecteur, on peut faire son produit scalaire avec un autre vecteur :

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{\partial(u_x)}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \tag{1.52}$$

On retrouve la formule de la divergence. Ainsi :

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} \tag{1.53}$$

Rotationnel :

Le rotationnel est un vecteur qui prend en argument un vecteur. En coordonnées cartésiennes, il est défini comme suit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \tag{1.54}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

En coordonnées cylindriques, son expression est la suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (\text{ru}_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

et en coordonnées sphériques, il s'exprime sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta u_\theta)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (ru_\phi)}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} \tag{1.57}$$

Laplacien :

Le laplacien est un scalaire, qui s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme suivante :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.58}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right)$$

En coordonnées cylindriques, son expression est la suivante :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.59}$$

et en coordonnées sphérique, le laplacien s'écrit comme suit :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{1.60}$$