Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche opérationnelle
L2 MA.

Bejaia 2024/2025

Série de TD N° 2 d'Analyse 3

Exercice 1. Étudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{n}{n^2x^2+n}$, $n \geq 1$.
2. $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$, $n \geq 1$.
3. $h_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto h_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.
4. $k_n(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto k_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur I des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$, $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$, $\alpha \geq 0$, $I = \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions défine sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = xe^{-n^2x}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$?
3. La suite $(f_n)'_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
4. Donner les intervalles de $]0,+\infty[$ sur lesquelles la convergence de la suite $(f'_n)_n$ est uniforme.

Exercice 4. Soit la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Comparer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Que peut-on conclure ?