Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire : 2024/2025
MATHS1 Octobre 2024

Corrigé de la séris de TD N°01 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n°1 .

1) La proposition est vraie
La négation :

$$(3 \quad \textit{ne divise pas} \quad 12) \vee (\sqrt{a^2} \neq |a|).$$

2)Fausse
La négation :

$$(26 > 3^2 + (-1)^2) \wedge (2^3 \neq 9).$$

3)Fausse
La négation :

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 1.$$

4)Vraie
La négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*; xy \neq 1.$$

5)Vraie
La négation :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; x + 1 \neq y + 2.$$

6) Fausse
La négation :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}; x + y \leq 0.$$

Exercice n°2 . Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On remarque de cette table de vérité que les propositions $(P \Longrightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ ont la même valeur de vérité (Dans tout les cas,les propositions sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses),donc elles sont équivalentes.

2. Donnons la négation des propositions suivantes :
   a. $P \Longrightarrow Q$,

$$\begin{array}{rcl} \overline{P \Longrightarrow Q} & \Longleftrightarrow & \overline{\overline{P} \vee Q} \\ & \Longleftrightarrow & \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \\ & \Longleftrightarrow & P \wedge \overline{Q}. \end{array}$$

   b. $P \vee (Q \wedge R)$.

$$\begin{array}{rcl} \overline{P \vee (Q \wedge R)} & \Longleftrightarrow & \overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)} \\ & \Longleftrightarrow & \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}). \end{array}$$

Exercice n°3 .

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le raisonnement direct, montrons que

$$(x^2 - xy - 2y^2 = 0) \Longrightarrow (x = 2y).$$

On suppose que "$x^2 - xy - 2y^2 = 0$" est vraie. Est ce que c'est vraie pour "$x = 2y$" ?
On a

$$\begin{array}{rcl} x^2 - xy - 2y^2 & = & x^2 + xy - xy - xy - 2y^2 = 0 \\ & = & x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0 \\ & = & x(x - 2y) + y(x - 2y) = 0 \\ & = & (x - 2y)(x + y) = 0 \end{array}$$

ce qui implique $x - 2y = 0$ ou $x + y = 0$, mais, on a $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, d'où $x = 2y$ est vraie.

2. On raisonne par l'absurde. On suppose que

$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{6n+3}{(n+2)^2} > 1 & \Longleftrightarrow & \dfrac{6n+3}{(n+2)^2} - 1 > 0 \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{6n+3-(n+2)^2}{(n+2)^2} > 0 \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{-n^2+2n-1}{(n+2)^2} > 0 \\ & \Longleftrightarrow & -\dfrac{(n-1)^2}{(n+2)^2} > 0 \text{ contradiction} \end{array}$$

car tout nombre négatif est strictement inférieur à 0.
D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$

3. a. En raisonnant par contraposition, montrons pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$,

$$\left(x \neq -\frac{1}{3} \text{ et } y \neq 7\right) \Longrightarrow (3xy - 21x + y + 3 \neq 10)\,.$$

Donc ça revient a montrer que :

$$3xy - 21x + y + 3 = 10 \Longrightarrow (x = -\frac{1}{3}) \vee (y = 7).$$

On suppose que $3xy - 21x + y + 3 = 10$, et on montre que $x = 7$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$.
On a :

$$\begin{array}{rcl} 3xy - 21x + y + 3 = 10 & \Longrightarrow & 3xy - 21x + y - 7 = 0 \\ & \Longrightarrow & 3x(y-7) + (y-7) = 0 \\ & \Longrightarrow & (y-7)(3x+1) = 0 \\ & \Longrightarrow & x = 7 \vee x = -\dfrac{1}{3} \end{array}$$

d'où le résultat.

3.b. En raisonnant par contraposition, montrons pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,tel que $a \neq -3b$,

$$\left(a \neq -\frac{14b}{3}\right) \Longrightarrow \left(\frac{2a+b}{a+3b} \neq 5\right)$$

Donc ça revient a montrer que :

$$\left(\frac{2a+b}{a+3b} = 5\right) \Longrightarrow \left(a = -\frac{14b}{3}\right).$$

On suppose que $\frac{2a+b}{a+3b} = 5$, et on montre que $a = -\frac{14b}{3}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{2a+b}{a+3b} = 5 \quad &\Longrightarrow \quad 2a+b = 5(a+3b) \\ &\Longrightarrow \quad -3a = 14b \\ &\Longrightarrow \quad a = -\frac{14b}{3}. \end{aligned}$$

4. Considérons la proposition

$$R : \big(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \in \mathbb{Q}\big).$$

a. Donnons la négation de R.

$$\begin{aligned} \overline{R} : \overline{(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \in \mathbb{Q})} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}, \overline{(x^2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \in \mathbb{Q})} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}, \overline{\overline{x^2 \in \mathbb{Q}} \vee x \in \mathbb{Q}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}, \overline{\overline{x^2 \in \mathbb{Q}}} \wedge \overline{x \in \mathbb{Q}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \in \mathbb{Q} \wedge x \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

b. Si on prend $x = \sqrt{2}$, on a $\sqrt{2}^2 \in \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d'où la proposition R est fausse.

Exercice n°4. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrons que

1. $(P_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

   Etape 1 (Initialisation) : Pour $n = 1$, (P_1) est vraie car,

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2(1) - 1 = 1 = 1^2.$$

   Etape 2 On suppose que la propriété (P_n) est vraie, et on montre que la la propriété (P_{n+1}) est vraie, c'est à dire, on suppose que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ et on montre que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$.

   On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Etape 3 (Conclusion) : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire.

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

2. Montrons par récurrence que

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \ \text{ divisible par } \ 17.$$

Il s'agit de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k.$$

Etape 1 (Initialisation) : Pour $n = 1$, on a : $3 \times 5^{2(1)-1} + 2^{3(1)-2} = 17 = 17 \times 1$. Donc ,$\exists k = 1 \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2(1)-1} + 2^{3(1)-2} = 17k$. D'où $P(1)$ est vraie.

Etape 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire $\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$, et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire
$\exists k' \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'$
On a

$$\begin{aligned}
3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 5^2 \times 5^{2n-1} + 2^3 \times 2^{3n-2} \\
&= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 8 \times 2^{3n-2} \\
&= 3 \times (8 + 17) \times 5^{2n-1} + 8 \times 2^{3n-2} \\
&= 8(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\
&= 8 \times 17k + 17 \times k'' \text{ avec } k'' = 3 \times 5^{2n-1} \quad (\text{car } P(n) \text{ est vraie}) \\
&= 17k' \quad \text{avec} \quad k' = (8k + k'') \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Etape 3 ((Conclusion) : Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ divisible par17.