Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

Mathématiques I

✠– Série numéro 2 : Ensembles, Relations et Applications–✠

Exercice 1 :

1. Soient A, B et C trois paries d'un ensemble E. Montrer que :
a. $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.
b. $C_E(A\bigcup B) = C_E(A)\bigcap C_E(B)$.
b. $(A\bigcup B)\times C = (A\times C)\bigcup(B\times C)$.

2. On considère les ensembles $E = \{1,2,3,4\}$, $A = \{(i,j)\in E^2/i<j\}$,
$B = \{(i,j)\in E^2/i=j\}$ et $C = \{(i,j)\in E^2/i>j\}$.
a. Représenter A, B et C par un dessin.
b. Montrer que A, B et C forment une partition de E^2.

Exercice 2 : Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4\}$ comme suit :
$\forall x,y\in E,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x+y$ est divisible par 3.
1. Dessiner le graphe représentant $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle reflexive ?
3. $\mathcal{R}$ est-elle Symétrique ? antisymétrique ?
4. Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{T}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs comme suit :
$\forall x,y\in\mathbb{Z}\,;\ x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : x+4y=5k$.
1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Soit $a\in\mathbb{Z}$. Déterminer la classe d'équivalence de a. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{T}$.

Exercice 4 : On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation binaire S par :
$\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\ xSy \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N} : y = x^k$.
1. Montrer que S est une relation d'ordre.
2. S est-elle d'ordre total ?

Exercice 5 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
1. Calculer $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$. f est-elle injective ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)-2=0$. f est-elle surjective ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$. (*Indication : utiliser* $(x+1)^2\geq 0$ *et* $(x-1)^2\geq 0$).

Exercice 6 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2+2x-3$.
1. Calculer $f^{-1}(-6)$ et $f^{-1}(0)$.
2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
3. Donner des intervalles I et J tels que $f : I\to J$ soit bijective
4. Déterminer l'application réciproque $f^{-1} : J\to I$.