Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
1ère année Ingénieurs ST+TM

Année universitaire 2024-2025
Octobre 2024

Série de TD n°01 d'Algèbre1

Ensembles, Relations binaires et Applications

Exercice 1.

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z}/ -5 < x \leq 5\} \quad \text{et } A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

Déterminer les ensembles suivants :

$$A \cap B, \quad \complement_E^{(A\cup B)}, A - B \text{ et } (A \cap B) \cap \complement_E^{(A\cap B)}.$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E. Montrer que
   a. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.
   b. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
   c. $A \cap (B - C) = (A \cap B) \cap (A - C)$;
3. Soit $E = \{-1, 0, 1, 2\}$.
   a) Donner l'ensemble $E \times E$.
   b) Déterminer les ensembles $A = \{(i, j) \in E \times E/i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E \times E/i > j\}$ et $C = \{(i, j) \in E \times E/i = j\}$.
   c) Montrer que A, B et C forment une partition de $E \times E$.

Exercice 2.

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, et R la relation binaire définie sur E par :
xRy si et seulement si $x + y$ est pair.

1. Dessiner le graphe représentatif de R.
2. montrer que R est une relation d'équivalence sur E.
3. Déterminer la classe de 0, et l'ensemble quotient E/R.

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$\forall x, \quad y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{T}y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 4.
1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

Montrer que :
a) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
b) $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.
2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty\left[, x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.\right.$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
b) Cet ordre est-il total ?

Exercice 5.
Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. f, g sont- elle injective ? surjective ?
2. A- t- on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.
3. Calculer $f(\{0, 1\}), f^{-1}(\{5\}), f([0, 1]), f(\mathbb{R}), f^{-1}([5, 7])$.
4. Calculer $g^{-1}(\{1\}), g([-4, 4]), g^{-1}([-4, -1])$ et $g^{-1}([0, 4[)$.

Exercice 6.
Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifions que pour tout réel a non nul on a : $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$. Que peut-on déduire ?
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par :

$$f(x) = h(x).$$

a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et déterminer la fonction réciproque f^{-1}.

[1]

1. **Dr. BOURENI**