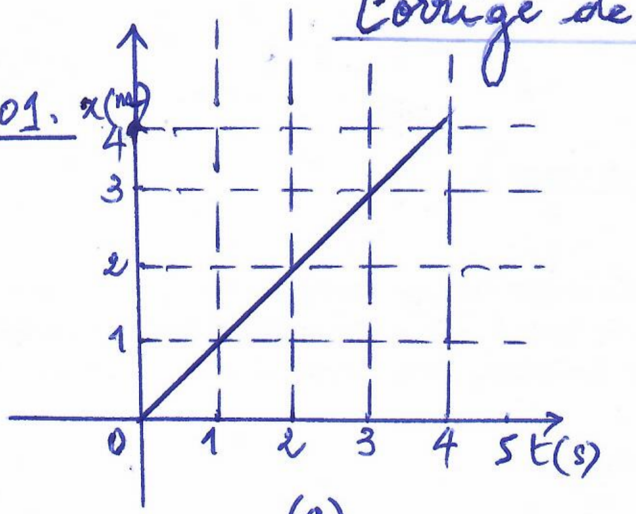
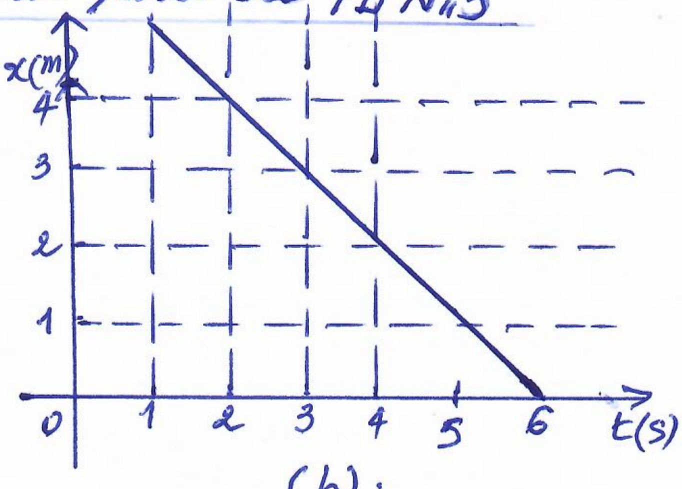
Corrigé de la série de TD N°3

EX.01.



(a)



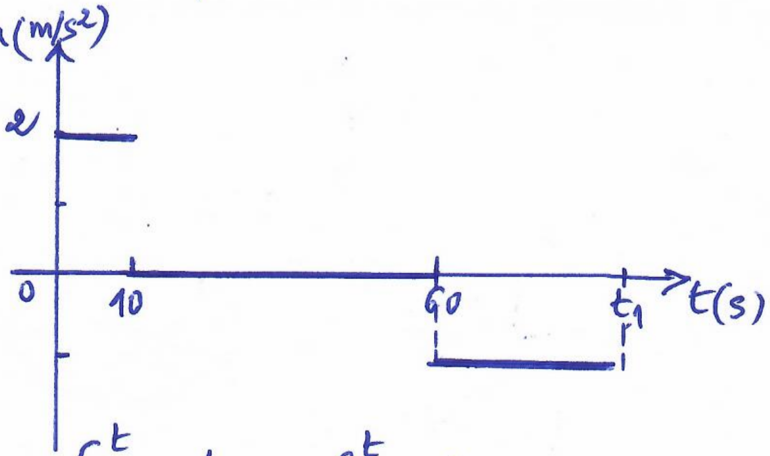
(b).

*(a) : Le mobile part du point 0 à $t=0$ et s'éloigne à la vitesse de 1 m/s pendant 6 secondes. Son équation horaire est : $x(t) = t$. C'est un mouvement réctiligne uniforme.

*(b) : Le mobile se rapproche du point 0 à la vitesse $v = 1m/s$ pendant 6 secondes. Son équation horaire est :

$$x(t) = -t + 6.$$

EX.02 :



1/ Equations de la vitesse et nature :

a) $t \in [0, 10]s$, $a_1 = 2m/s^2$

on sait que : $a_1 = \dfrac{dv_1(t)}{dt}$

$$\Rightarrow a_1 dt = dv_1(t) \Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} dv_1 = \int_{t_0=0}^{t} 2\,dt' = 2\int_{t_0=0}^{t} dt'$$

on a : $v_0(t_0=0) = 0\,m/s$, donc : $v_1(t) = 2t$.

Le mouvement est uniformément accéléré.

b) $t \in [10, 60]s$, $a_2 = 0\,m/s^2$.

$$a_2 = \frac{dv_2(t)}{dt} = 0 \Rightarrow v_2(t) = \text{constante} = v_1(10s) = 20m/s.$$

Le mouvement est réctiligne uniforme

c/ $t \in [60, t_1]$ s, $a_3 = -1 m/s^2$.

$$a_3 = \frac{dv_3(t)}{dt} \Rightarrow dv_3(t) = a_3\, dt \Rightarrow \int_{t_0=60s}^{t} dv_3(t) = a_3 \int_{t_0=60s}^{t} dt'$$

alors, $v_3(t) - v_3(t_0 = 60s) = -(t - 60)$.

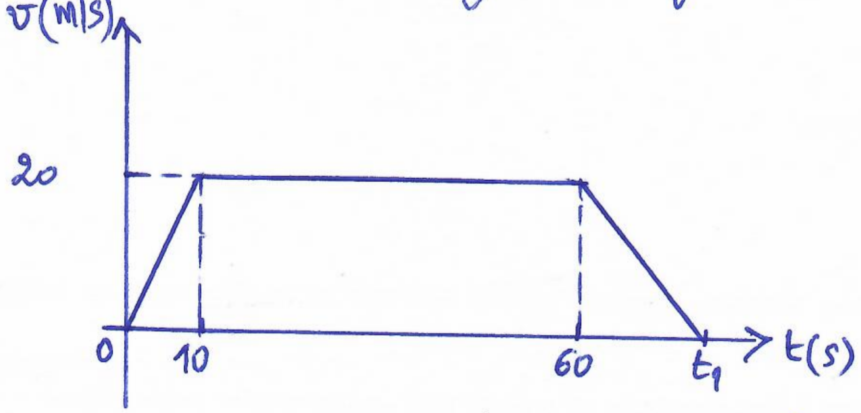
d'où $v_3(t) = -t + 60 + v_3(60s)$

or : $v_3(60s) = v_2(60s) = v_2(10s) = 20 m/s$.

donc, $v_3(t) = -t + 80$

Le mouvement est réctiligne uniformément retardé.

2/



A t_1, la rame de tramway arrive à la station, donc on a.

$v_3(t_1) = 0 \Rightarrow -t_1 + 80 = 0 \Rightarrow t_1 = 80s$.

3/ Les équations horaires ($x(t)$).

a/ $t \in [0, 10]$ s, on a : $v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \Rightarrow dx_1(t) = v_1(t)\, dt$.

donc, $\int_{t_0=0}^{t} dx_1(t') = \int_{t_0=0}^{t} v_1(t')\, dt' \Rightarrow [x_1(t')]_{t_0=0}^{t} = \int_{t_0=0}^{t} 2t'\, dt'$

En intégrant, on obtient,

$x_1(t) = t^2 + x_1(t_0=0) \Rightarrow x_1(t) = t^2$.

b/ $t \in [10, 60]$ s, $v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} \Rightarrow \int_{t_0=10}^{t} dx_2(t') = \int_{t_0=10}^{t} v_2(t')\, dt'$

$$\int_{t_0=10}^{t} dx_2(t') = 20\int_{t_0=10}^{t} dt'$$

on a alors,

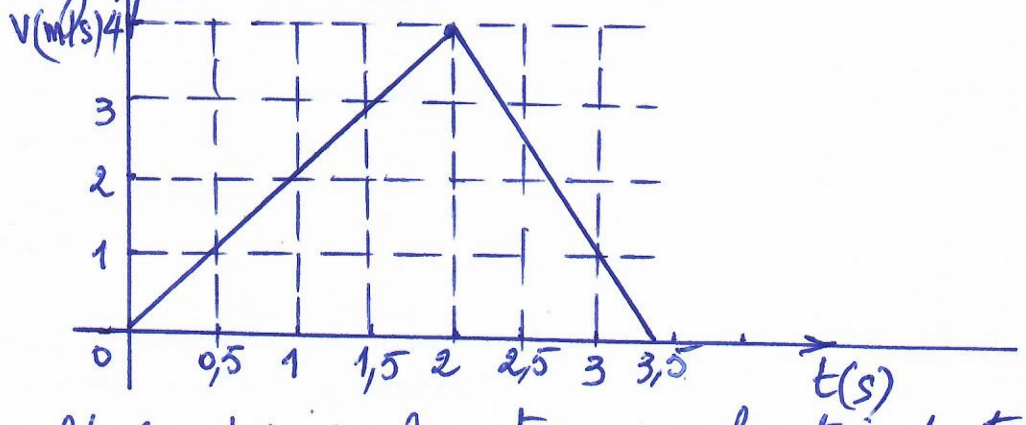
$$x_2(t) - x_2(t_0=10) = 20(t-10).$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 20t - 200 + x_2(t_0=10).$$

or $x_2(t_0=10s) = x_1(t=10s) = 10^2 = 100\ m.$

Donc, $x_2(t) = 20t - 100.$

<u>Ex. 03</u>: soit le graphe ci-dessous:



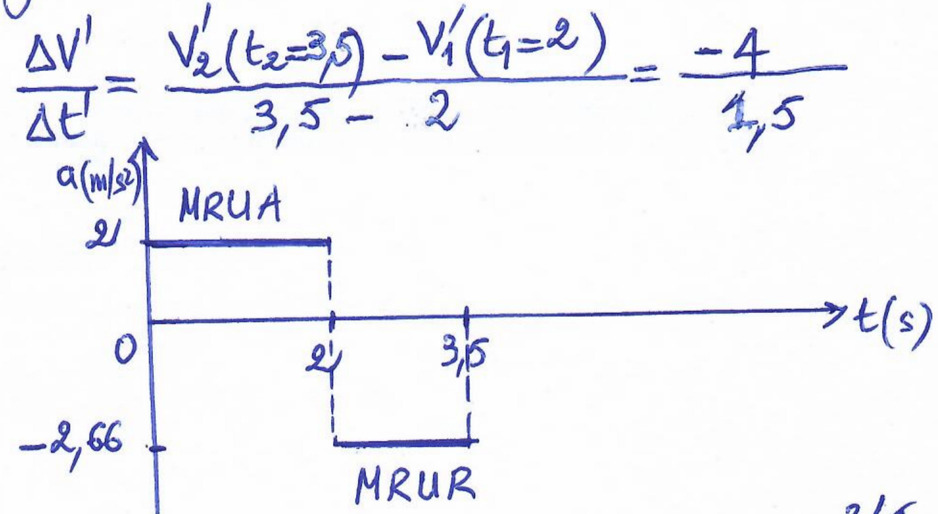
a) $t \in [0,2]s$, l'équation de la vitesse en fonction du temps est une droite, donc l'accélération est constante:

donc on écrit : $a_1 = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V_2(t_2=2) - V_1(t_1=0)}{t_2 - t_1} = \dfrac{4-0}{2-0} = 2m/s^2$

b) $t \in [2, 3{,}5]s$, l'équation horaire de la vitesse est une droite de pente négative, donc l'accélération est constante et négative:

$$a_2 = \frac{\Delta V'}{\Delta t'} = \frac{V'_2(t_2=3{,}5) - V'_1(t_1=2)}{3{,}5 - 2} = \frac{-4}{1{,}5}$$

$a_2 = -2{,}66\ m/s^2.$



2/ $t \in [0,2]$ s, le mouvement est réctiligne uniformément accéléré : (MRUA).

$t \in [2, 3{,}5]$ s, le mouvement est réctiligne uniformément décéléré ou retardé (MRUR).

3/ Dans la première phase, $t \in [0,2]$ s, on a :

$$a_1 = 2\,m/s^2 \Rightarrow v_1(t) = 2(t - t_0) + v_{10}(t_0 = 0) = 2t.$$

Car $v_{10}(t_0 = 0) = 0\,m/s$

Puis : $x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 + x_0(t_0=0). \Rightarrow x_1(t) = t^2$, Car $x_0(t_0=0) = 0$

4/ De même pour la 2° phase, $t \in [2, 3{,}5]$ s, on a :

$a_2 = -2{,}66\,m/s^2$ donc :

$$a_2 = \frac{dv_2(t)}{dt} \Rightarrow dv_2(t) = a_2\,dt \Rightarrow \int_{t_0=2}^{t} dv_2(t') = -2{,}66 \int_{t_0=2}^{t} dt'$$

En intégrant, on obtient :

$$v_2(t) - v_2(t_0 = 2s) = -2{,}66(t-2)$$

d'où $v_2(t) = -2{,}66t + 5{,}32 + v_2(t_0 = 2s)$.

où $v_2(t_0 = 2s) = 2 \times 2 = 4\,m/s = v_1(t = 2s)$.

Donc : $v_2(t) = -2{,}66t + 9{,}32$.

EX.04 : soit $x(t) = t^3 - 7t^2 + 10t - 2$.

1/ La vitesse instantanée, $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 3t^2 - 14t + 10$.

L'accélération instantanée : $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 6t - 14$.

2/ $v(t_1 = 1s) = -1 m/s$, $v(t_2 = 3s) = 5 m/s$, $v(t_3 = 5s) = 15 m/s$

$a(t_1 = 1s) = -8 m/s^2$, $a(t_2 = 3s) = 4 m/s^2$, $a(t_3 = 5s) = 16 m/s^2$

3/ Les vitesses moyennes :

* entre t_1 et t_2 : $v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-8 - 2}{3 - 1} = -5 m/s$.

$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = 2 m/s^2$

* entre : t_2 et t_3 : $v_m = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{-2 - (-8)}{5 - 3} = 3 m/s$.

$a_m = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{15 - 5}{5 - 3} = 5 m/s^2$.

EX.05 : Soient les équations horaires suivantes :

$x = t^2 - 1$, $y = 2t$.

1/ La trajectoire $y = f(x)$:

De la première éq., on a : $t^2 = x + 1 \Rightarrow t = \sqrt{x+1}$.

et on le remplace dans la 2ᵉ équation :

$y = 2t = 2\sqrt{x+1}$.

La trajectoire est une parabole.

2/ La vitesse a les composantes : $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$ et $v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 2$

Son module est : $|\vec{v}| = \sqrt{(2t)^2 + 2^2} = \sqrt{4t^2 + 4}$.

3/ L'accélération a les Composantes suivantes.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \quad \text{et} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0.$$

son module est $|\vec{a}| = 2\, m/s^2$.

4/ Le mouvement est rectiligne uniformement accéléré.

5/ */ L'accélération tangentielle est :

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{4t^2+4}\right) = 4t.(4t^2+2)^{-1/2}.$$

*/ L'accélération normale.

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \text{et} \quad |\vec{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = |\vec{a}|^2 - a_T^2.$$

$$a_N^2 = 4 - 16t^2(4t^2+4)^{-1} = 4 - \frac{16t^2}{(4t^2+4)}$$

$$a_N^2 = \frac{16}{4t^2+4} \Rightarrow a_N = \frac{4}{\sqrt{4t^2+4}} = \frac{4}{V}.$$

6/ Le rayon de Courbure.

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} = \frac{4}{V} \Rightarrow \rho = \frac{V^3}{4}.$$

Ex.06

Soit le mobile qui se déplace dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

on a : l'accélération : $\vec{a} = a_0 \vec{j}$ et la vitesse initiale est :

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j}.$$

on a : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$$\vec{a} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_0 \equiv \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{OM} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\, dt \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = a_0 t + v_{0y} \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow d\vec{OM} = \vec{v}\, dt \Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x} t & (1) \\ y = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{0y} t & (2). \\ z = 0 \end{cases}$$

on a alors : $\vec{a} = \vec{a}_0 = a_0 \vec{j}$.

$$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 = v_{0x} \vec{i} + (a_0 t + v_{0y}) \vec{j}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OM}_0 = v_{0x} t \vec{i} + \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{0y} t\right) \vec{j}$$

on prend $\vec{OM}_0 = \vec{0}$.

De l'équation (1), on a : $t = \frac{x}{v_{0x}}$.

on le remplace dans l'équation (2) et on a :

$$y = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_{0x}^2} + v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y = \frac{a_0}{2 v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x.$$

il s'agit d'une parabole.

Ex. 07

Soit $R(O,x,y,z)$ un référentiel et on prend la route parallèle à l'axe $\vec{Ox}$.

1/ On choisit l'instant $t=0$, où la voiture passe, le gendarme est en O. La position de la voiture est repérée par :

$$x_V = v_0 t \quad , \quad v_0 \text{ est Constante } = 120\, Km/h.$$

La moto a un mouvement uniformément accéléré avec une accélération a_m : $\ddot{x}_M = a_m \Rightarrow v_m = a_m t + v_{om} = a_m t$ puisque $v_{om} = 0$.

$$x_M = \frac{1}{2} a_m t^2 + x_{om} = \frac{1}{2} a_m t^2, \quad \text{Car } x_{om} = 0.$$

Le gendarme rattrape la voiture à l'instant t_r, tel que.

$$x_m(t_r) = x_V(t_r) \Leftrightarrow \frac{1}{2} a_m t_r^2 = v_0 t_r$$

$$\Downarrow$$

$$t_r = 2 \frac{v_0}{a_m} . (*)$$

Or la moto atteint la vitesse $v_1 = 100\, Km/h$ au bout de $t_1 = 12\, s$. On a : $V_1 = a_m t_1 \Rightarrow a_m = \frac{V_1}{t_1}$.

En remplaçant a_m dans l'équation $(*)$, on obtient :

$$t_r = 2 . \frac{v_0}{V_1} t_1 = 2 . \frac{120}{100} . 12 = 28{,}8\, s.$$

2/ La distance parcourue par la moto durant le temps t_r,

$$L = \frac{1}{2} a_m t_r^2 = \frac{1}{2} \frac{V_1}{t_1} . 4 \frac{v_0^2}{V_1^2} t_1^2 = 2 \frac{v_0^2}{V_1} t_1$$

A.N. $L = 2 . \frac{120^2}{100} . \frac{12}{3600} = 0{,}96\, Km.$

3/ La vitesse atteinte par la moto est donné par :

$$v_r = a_m t_r = \frac{V_1}{t_1} . 2 \frac{v_0}{V_1} t_1 = 2 v_0$$

A.N. $v_r = 240\, Km/h.$