Solution de la série d'exercices $n°03$

December 6, 2023

Solution d'xercice 1 *1.* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, *on a* $0\leq\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq|x|$, *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}|x|=0$, *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=0$, *par conséquence* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

2. On va multiplier par la quantité conjugée.

$$\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x^2-x}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{(x-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}.$$

D'où $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{(x-1)}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=-\frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Ona

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\longrightarrow 0}e^{\frac{\ln(1+y)}{y}}=e,\quad\left(\lim_{y\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.\right)$$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$, $(a,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$. *On a:*

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+...+a^{n-2}x+a^{n-1}),$$

alors

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\longrightarrow a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+...+a^{n-2}x+a^{n-1})=na^{n-1}.$$

Solution d'xercice 2 *I.*

$$f_1(x)=\begin{cases}x^2+x & si\quad x\leq 0\\ \sin x & si\quad 0<x\leq\pi\\ 1+\cos x & si\quad x>\pi\end{cases}$$

$D_{f_1}=\mathbb{R}$.
f_1 *est continue sur :* $]-\infty,0[\cup]0,\pi[\cup]\pi,+\infty[$ *car les foncions polynôme,* $\sin$ *et* $\cos$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}f_1(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x^2+x)=0=f_1(0)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}f_1(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\sin x=0=f_1(0)$.
Donc f_1 *est continue au point* 0.
$\lim\limits_{x\longrightarrow \pi^-}f_1(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow \pi^-}\sin x=0=f_1(\pi)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi^+}f_1(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow \pi^+}(1+\cos x)=0=f_1(\pi)$.
Donc f_1 *est continue au point* π.
Conclusion : f_1 *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

$$f_2(x)=\begin{cases}x^2-1 & si\quad x\leq 0\\ ax+b & si\quad 0<x\leq 1\\ \sqrt{x+3} & si\quad x>1\end{cases}$$

$D_{f_2}=\mathbb{R}$.
f_2 *est continue sur :* $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$ *car les foncions polynômes, sont continues sur* $\mathbb{R}$ *en particulier sur* $]-\infty,0[\cup]0,1[$ *et la fonction racine est continue sur* $]-3,+\infty[$ *en particulier sur* $]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}f_2(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x^2-1)=-1=f_2(0)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}f_2(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(ax+b)=b$.

Donc f_2 est continue au point 0 si et seulement si $b=-1$.
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f_2(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(ax+b) = a+b = f_2(1)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f_2(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\sqrt{x+3} = 2$.
Donc f_2 est continue au point 1 si et seulement si $a+b=2$.
Conclusion : f_2 est continue sur $\mathbb{R}$ si $b=-1$ et $a+b=2$ i.e. $a=3$ et $b=-1$.
II.
Rappel,
Soit f une fonction réelle définie et continue sur $D/\{x_0\}$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l$ (existe). Alors la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in D/\{x_0\} \\ l, & si\ x = x_0 \end{cases}$$

s'appelle prolongement par continuité de f.

On a f_1 est définie sur $\mathbb{R}^*$.
et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$
et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$
Comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \neq \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ *n'existe pas en 0, donc f_1 n'est pas prolongeable par continuité.*
$f_2(x) = \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}$
La fonction f_2 n'est pas définie au point $x_0=-1$ et continue sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, et
$\lim\limits_{x\longrightarrow -1} f_2(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1} = \frac{8}{3}$.
Car $\lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1} = \dfrac{0}{0}$ *(Forme indéterminée).*
$\lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1} = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+6)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{(x^2-x+6)}{(x^2-x+1)} = \dfrac{8}{3}$ *(finie).*
La prolonger de f_2 est :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}, & si\ x \neq -1 \\ \frac{8}{3}, & si\ x = -1. \end{cases}$$

Solution d'xercice 3 *Rappel (Théorème des valeurs intermédiaires)*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a,b]$. Si
1. f est continue sur $[a,b]$.
2. $f(a).f(b) < 0$.
alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(c)=0$. Si de plus f est strictement croissante (strictement décroissante) sur $[a,b]$ alors c est unique.

Soit $f(x) = x^3 - 12x + 1$.
En effet,
f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[3,4]$ de plus on a $f(3)=-8$, $f(4)=17$ et f est strictement croissante sur cet intervalle car $f'(x) = 3x^2 - 12 > 0$ pour tout $x \in [3,4]$.
f est continue et strictement croissante sur $[3,4]$ et $f(3).f(4) < 0$,
alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f(x)=0$ admet une unique solution $c \in]3,4[$.

Solution d'xercice 4 *1. On étudie la dérivabilité de la fonction f définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ x\ln x - x & si\ x > 0 \end{cases}$$

D'abord: on a $D_f = \mathbb{R}$, avant d'étudier la dérivabilité on va étudier la continuité, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, f est continue.

- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$ *(car $\frac{1}{x} \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0^-$).*
- $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x - x = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x(\ln x - 1) = 0 = f(0)$ *(car la limite de $x\ln x$ en 0 est une forme indéterminée dont le résultat est connu et vaut 0).*

Ces deux limites sont égales à $f(0)$ donc f est continue en 0.
On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on va étudier la dérivabilité en 0, on calcule la limite du taux de variation en 0, donc ici on va calculer la limite à gauche et à droite de ce taux

- *Pour $x < 0$:*
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{0}{0} \quad \textit{(Forme indéterminée).}$$
poser $t = \frac{1}{x}$, ainsi $t \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t\longrightarrow -\infty} te^t = 0$$
Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

- *Pour $x > 0$*
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x\ln x - x}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x(\ln x - 1)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \ln x - 1 = -\infty.$$
On en conclut que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0, donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

Rappel: la régle de l'Hôpital s'applique pour élever indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ dans la calcule des limites.

Solution d'xercice 5

1. *la limite de $\frac{1-\cos x}{e^x-1}$ en 0 est indéterminée, on regarde la limite du quotient des dérivées du numérateur et du dénominateur*
$$\frac{(1-\cos x)'}{(e^x-1)'} = \frac{\sin x}{e^x},$$
donc
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{e^x-1} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$:
$$\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2} = \frac{\ln(1)}{(\pi-\pi)^2} = \frac{0}{0} \quad \textit{(Forme indéterminée)}$$
$$= \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi-2x)} \quad \textit{(En appliquant la régle de l'Hôpital)}$$
$$= \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-4\sin x(\pi-2x)} = \frac{0}{0} \quad (\textit{(Forme indéterminée)}$$
On appliquant la régle de l'Hôpital pour la $2^{éme}$ fois
$$\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-4\left(\cos x(\pi-2x) - 2\sin x\right)} = \frac{-1}{-4\times(-2)\times(1)} = -\frac{1}{8}$$

3. *Calcul de* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$:
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\textit{(Forme indéterminée)}$$
On applique la régle de l'Hôpital
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1-\cos x}{2+\cos x}.$$
On ne continue pas ! car $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ n'existe pas. Donc on ne peut pas appliquer la régle de l'Hôpital. Pour calculer cette limite, on peut, cependant la calculer facilement comme suit :
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x-\sin x}{2x+\sin x} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x(1-\frac{\sin x}{x})}{x(2+\frac{\sin x}{x})} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{2+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Solution d'xercice 6 ***Théorème 1*** *Théorème de Rolle*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. Si
1. f est continue sur $[a, b]$.
2. f est dérivable sur $]a, b[$.
3. $f(a) = f(b)$.
alors $\exists c \in]a, b[$ telle que $f'(c) = 0$.

I. La fonction $x \longrightarrow e^x \sin(x) - 1$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
(Comme f est la somme et produit de fonctions élémentaires définies sur $\mathbb{R}$).
en particulier continue sur $[0, \pi]$, dérivable sur $]0, \pi[$.
Comme $f(0) = f(\pi) = -1$, Daprès Rolle il existe un réel $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.
Donc $e^c(\sin c + \cos c) = 0$, c-à-d $\sin c + \cos c = 0$ car $e^c \neq 0$.
Ainsi l'équation $\sin x + \cos x = 0$ admet au moins une solution $c \in]0, \pi[$.

Théorème 2 *Théorème des accroissements finis*
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. Si
1. f est continue sur $[a, b]$.
2. f est dérivable sur $]a, b[$.
alors $\exists c \in]a, b[$ telle que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

II.) i) Posons $g(t) = \ln t$.
Pour $t > 0$, la fonction g est définie , continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
Soit $x > 0$, g définie continue sur $[x, x + 1]$ et dérivable sur $]x, x + 1[$.
Daprés le théorème des accroissements finis, il existe
$c \in]x, x + 1[$ tel que $g(x + 1) - g(x) = ((x + 1) - x)g'(c)$
c'est à dire $\ln(x + 1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$. (car $g'(t) = \frac{1}{t}$)
On a : $0 < x < c < x + 1 \Longrightarrow \frac{1}{x + 1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$
D'où: $\forall x > 0, \frac{1}{x + 1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

(ii) $\sqrt{x} > 0$, donc $\frac{\sqrt{x}}{x + 1} < \sqrt{x}(\ln(x + 1) - \ln(x)) < \frac{\sqrt{x}}{x}$.
Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
Par le théorème d'encadrement , on conclut que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x}(\ln(x + 1) - \ln(x)) = 0$
De la même manière pour $x > 0$, on obtient :
$\frac{x}{x + 1} < x(\ln(x + 1) - \ln(x)) < \frac{x}{x} = 1$
d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln(x)) = 1$.
(iii)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{1 + x}{x}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x(\ln(x + 1) - \ln(x)) = 1.$$

Comme $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$
donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.