Université de A/MIRA de Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie $1^{\text{ère}}$ année Ingénieurs ST+TM

Année universitaire : 2024/2025
MATHS1 Octobre 2024

Corrigé de la série de TD N°01 : Ensembles, Relations binaires et Applications

Exercice n°1 .

1. On considère les ensembles :

$$B = \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\}, E = \{x \in \mathbb{Z}/ -5 < x \leq 5\} \quad \text{et } A = E \cap \mathbb{N}^*.$$

On détermine $A \cap B$. On a

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z}/|x| < 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}/ -3 < x < 3\} \\ &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$E = \{x \in \mathbb{Z}/ -5 < x \leq 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

donc

$$A = E \cap \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ensuite

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

On détermine : $\complement_E^{A\cup B}$.

$$\complement_E^{A\cup B} = \{x \in E/x \notin A \cup B\}$$

comme : $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, d'où

$$\complement_E^{A\cup B} = \{-4, -3\}$$

On détermine : $A \backslash B$.

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \backslash \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{3, 4, 5\}$$

On détermine : $(A \cap B) \cap \complement_E^{A\cap B}$:

$$(A \cap B) \cap \complement_E^{A\cap B} = \{1, 2\} \cap \{-4, -3, -2, -1, 0, 3, 4, 5\} = \emptyset$$

2. Soient E un ensemble non vide et A, B, C et D quatre parties de E.

a) Montrons que : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$.
On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et on démontre que : $A \subset C_E B$.
Soit $x \in A$.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \notin B \text{ car } A \cap B = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in C_E B, \end{aligned}$$

donc $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C_E B$, d'où $A \subset C_E B$.
Alors, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset C_E B$

b) Montrons que : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.
On a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ et } (x, y) \in (C \times D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \text{ et } (x \in C \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ et } (y \in B \text{ et } y \in D) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ et } y \in B \cap D \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \end{aligned}$$

Donc, $\forall (x,y) : (x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow (x,y)\in (A\cap C)\times(B\cap D)$.
Alors, $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$.
c) Montrons que : $A\cap(B-C) = (A\cap B)\cap(A-C)$
Soit $x\in A\cap(B-C)$, on a

$$\begin{aligned} x\in A\cap(B-C) &\Longleftrightarrow x\in A \text{ et } x\in(B-C)\\ &\Longleftrightarrow x\in A \text{ et } (x\in B \text{ et } x\notin C)\\ &\Longleftrightarrow (x\in A \text{ et } x\in B) \text{ et } (x\in A \text{ et } x\notin C)\\ &\Longleftrightarrow x\in(A\cap B) \text{ et } x\in(A-C)\\ &\Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A-C). \end{aligned}$$

Donc, $\forall x : x\in A\cap(B-C) \Longleftrightarrow x\in(A\cap B)\cap(A-C)$.
Alors, $A\cap(B-C) = (A\cap B)\cap(A-C)$.
3 Soit $E=\{-1,0,1,2\}$
a) Donnons l'ensemble $E\times E$.
On a :

$$\begin{aligned} E\times E &= \{(x,y)/x\in E \text{ et } y\in E\}\\ &= \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,-1),(0,0),(0,1),\\ &(0,2),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2)\} \end{aligned}$$

b) Déterminons les ensembles A, B et C.

$$\begin{aligned} A &= \{(i,j)\in E\times E/i<j\}\\ &= \{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{(i,j)\in E\times E/i>j\}\\ &= \{(0,-1),(1,-1),(1,0),(2,-1),(2,0),(2,1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \{(i,j)\in E\times E/i=j\}\\ &= \{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2)\} \end{aligned}$$

c) Montrons que A, B et C forment une partition de $E\times E$.
On a :
1. $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ et $C\neq\varnothing$.
2. $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$ et $A\cap C=\varnothing$.
3. $A\cup B\cup C = E$.

D'où A, B et C forment une partition de $E\times E$.

Exercice n°2 .
Soit $E=\{0,1,2,3,4\}$, et $\Re$ la relation binaire définie sur E par :
$x\Re y \Longleftrightarrow x+y$ est pair.

1. Le graphe représentatif de $\Re$:je vais vous l'envoyer en photo après

2. Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence :

i. $\Re$ est réflexive car on a $\forall x\in E, x\Re x$

$$0\Re0,\ 1\Re1,\ 2\Re2,\ 3\Re3,\ 4\Re4.$$

ii. $\Re$ est symétrique car on a $\forall x,y\in E, x\Re y\Longrightarrow y\Re x$

$$0\Re0\Longrightarrow0\Re0$$

$$0\Re2\Longrightarrow2\Re0$$

$$0\Re4\Longrightarrow4\Re0$$

$$1\Re1\Longrightarrow1\Re1$$

$$1\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 1$$
$$2\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 2$$
$$2\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2$$
$$2\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 2$$
$$3\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 3$$
$$3\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 3$$
$$4\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 4$$
$$4\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 4$$
$$4\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4.$$

iii. $\Re$ est transitive car on a $\forall x, y, z \in E, x\Re y \ \text{ et } \ y\Re z \Longrightarrow x\Re z$.

$$0\Re 0 \text{ et } 0\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0,\ 0\Re 0 \text{ et } 0\Re 2 \Longrightarrow 0\Re 2,\ 0\Re 0 \text{ et } 0\Re 4 \Longrightarrow 0\Re 4,$$
$$0\Re 2 \text{ et } 2\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0,\ 0\Re 2 \text{ et } 2\Re 2 \Longrightarrow 0\Re 2,\ 0\Re 2 \text{ et } 2\Re 4 \Longrightarrow 0\Re 4,$$
$$0\Re 4 \text{ et } 4\Re 0 \Longrightarrow 0\Re 0,\ 0\Re 4 \text{ et } 4\Re 2 \Longrightarrow 0\Re 2,\ 0\Re 4 \text{ et } 4\Re 4 \Longrightarrow 0\Re 4,$$
$$1\Re 1 \text{ et } 1\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 1,\ 1\Re 1 \text{ et } 1\Re 3 \Longrightarrow 1\Re 3,$$
$$1\Re 3 \text{ et } 3\Re 1 \Longrightarrow 1\Re 1,\ 1\Re 3 \text{ et } 3\Re 3 \Longrightarrow 1\Re 3,$$
$$2\Re 0 \text{ et } 0\Re 0 \Longrightarrow 2\Re 0,\ 2\Re 0 \text{ et } 0\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2,\ 2\Re 0 \text{ et } 0\Re 4 \Longrightarrow 2\Re 4,$$
$$2\Re 2 \text{ et } 2\Re 0 \Longrightarrow 2\Re 0,\ 2\Re 2 \text{ et } 2\Re 4 \Longrightarrow 2\Re 4,\ 2\Re 2 \text{ et } 2\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2,$$
$$2\Re 4 \text{ et } 4\Re 0 \Longrightarrow 2\Re 0,\ 2\Re 4 \text{ et } 4\Re 2 \Longrightarrow 2\Re 2,\ 2\Re 4 \text{ et } 4\Re 4 \Longrightarrow 2\Re 4,$$
$$3\Re 1 \text{ et } 1\Re 1 \Longrightarrow 3\Re 1,\ 3\Re 1 \text{ et } 1\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 3,$$
$$3\Re 3 \text{ et } 3\Re 1 \Longrightarrow 3\Re 1,\ 3\Re 3 \text{ et } 3\Re 3 \Longrightarrow 3\Re 3,$$
$$4\Re 0 \text{ et } 0\Re 0 \Longrightarrow 4\Re 0,\ 4\Re 0 \text{ et } 0\Re 2 \Longrightarrow 4\Re 2,\ 4\Re 0 \text{ et } 0\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4,$$
$$4\Re 2 \text{ et } 2\Re 0 \Longrightarrow 4\Re 0,\ 4\Re 2 \text{ et } 2\Re 2 \Longrightarrow 4\Re 2,\ 4\Re 2 \text{ et } 2\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4,$$
$$4\Re 4 \text{ et } 4\Re 0 \Longrightarrow 4\Re 0,\ 4\Re 4 \text{ et } 4\Re 2 \Longrightarrow 4\Re 2,\ 4\Re 4 \text{ et } 4\Re 4 \Longrightarrow 4\Re 4.$$

(On est pas obligé de leurs écrire tout sur le tableau, mais on peut juste leurs expliquer sur le graphe que c'est une relation d'équivalence)
Finalement, de i, ii et iii, $\Re$ est une relation d'équivalence.

3. Déterminons la classe de 0, et l'ensemble quotient$E/\Re$. O na :

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{x \in E, x\Re 0\} \\ &= \{x \in E, x + 0 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \{x \in E, x\Re 1\} \\ &= \{x \in E, x + 1 \text{ est pair}\} \\ &= \{1, 3\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{x \in E, x\Re 2\} \\ &= \{x \in E, x + 2 \text{ est pair}\} \\ &= \{0, 2, 4\} = \overline{0}.\end{aligned}$$

$$\overline{3} = \overline{1}, \quad \text{et } \overline{4} = \overline{0}.$$

d'où

$$E/\Re = \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}.$$

Exercice n°3 .

Soit τ une relation définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \ x\tau y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

.

1. Montrons que τ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:

i. Réflexivité de τ : Soit $x \in \mathbb{R}$. De la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit que la relation est réflexive.

ii. Symétrie de τ : Soient $x, y \in \mathbb{R}; x\tau y$, alors on a :

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y \quad &= (\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 x) \\ &= 1 + (\cos^2 y + \sin^2 x) \end{aligned}$$

mais, $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + 1 = 2$, d'où

$$\cos^2 y + \sin^2 x = 1$$

et donc τ est symétrique.

iii. Transitivité de τ : Soient $x, y, z \in \mathbb{R} : x\tau y$ et $y\tau z$. Montrons que $x\tau z$.
Si $x\tau y$ et $y\tau z$, on a :

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \text{ et } \cos^2 y + \sin^2 z = 1$$

ce implique

$$\cos^2 x + (\cos^2 y + \sin^2 y) + \sin^2 z = 2$$

d'où

$$\cos^2 x + \sin^2 z = 1$$

Donc τ est transitive. Finalement, de i, ii et iii, τ est une relation d'équivalence.

2. Déterminons la classe d'équivalence de $\dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\pi}}{6}\right) &= \left\{x \in \mathbb{R}/x\tau\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos^2 x + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos^2 x = \frac{3}{4}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\left|\cos x\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ &= \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice n°4.

1) Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y.$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :

On a : $0\mathcal{R}2$, car $0^2 - 2^2 = -4 \leq -2 = 0 - 2$. Mais, $2 \not\mathcal{R} 0$, car $2^2 - 0^2 > 2 = 2 - 0$.

b) Montrons que $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique :
On a $0\mathcal{R}1$ et $1\mathcal{R}0$, car

$$0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \text{ et } 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0.$$

Mais $0 \neq 1$.
2) On définit sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty\, [, x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 \leq x - y$$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
i) Réflexivité de S ? $(\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, x\mathcal{S}x)$?
Soit $x \in]\frac{1}{2}, +\infty\, [$. On a : $x^2 - x^2 = 0 = x - x$.
Donc, $x^2 - x^2 \leq x - x$.
Par la suite, $\forall x \in]\, \frac{1}{2}; +\infty[, x\mathcal{S}x$.
D'où, $\mathcal{S}$ est une relation réflexive.
ii) Antisymétrie de S ? $(\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y)$?
Soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et on démontre $x = y$. On a

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ et \\ y\mathcal{S}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ y^2 - x^2 \leq y - x \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ et \\ x^2 - y^2 \geq x - y \end{cases}$$

Par la suite, $x^2 - y^2 = x - y$.
On a :

$$x^2 - y^2 = x - y \Longrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0.$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = 1 - y \text{ (impossible, car } x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[). \end{cases}$$

Donc, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}x \Longrightarrow x = y$.
D'où la relation $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
iii) Transitivité de S : $(\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z)$?
Soient $x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[$. On suppose $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$ et on démontre $x\mathcal{S}z$.
On a :

$$\begin{cases} x\mathcal{S}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{S}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 \leq x - y \\ \text{et} \\ y^2 - z^2 \leq y - z \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x^2 - z^2 \leq x - z.$$

Donc, $\forall x, y, z \in]\frac{1}{2}, +\infty[, x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z \Longrightarrow x\mathcal{S}z$.
D'où la relation $\mathcal{S}$ est transitive

De (i), (ii) et (iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.
b) Cet ordre est total.
En effet, soient $x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.
On a : $x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $x^2 - y^2 \geq x - y$.
donc, $\quad x^2 - y^2 \leq x - y$ ou $y^2 - x^2 \leq y - x$.
d'où, $\quad x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.
Alors, $\forall x, y \in]\frac{1}{2}, +\infty[$: $x\mathcal{S}y$ ou $y\mathcal{S}x$.

Exercice n°5. Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. g n'est pas injective car : $-1 \neq 1$ et $g(-1) = g(1)$.
Elle n'est pas surjective car : pour $y = -2; \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq -2 (g(x)$ est toujours positive).
Injectivité de f : $f'(x) = 2 > 0, \Rightarrow f$ est strictement croissante d'où l'injectivité de f.
Surjectivité de f :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ? x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

Soit $y \in \mathbb{R}$
$y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}$,
Donc, $\forall y \in \mathbb{R}; \exists x = \frac{y-5}{2} \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = y$
D'où f est surjective.
2.On a :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \frac{2}{x^2 + 1} + 5$$

et

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = \frac{1}{(2x + 5)^2 + 1}.$$

Alors, $f \circ g \neq g \circ f$.
3. Calculons : $f(\{0, 1\}), f^{-1}(\{5\}), f([0, 1]), f(\mathbb{R}), f^{-1}([5, 7])$,

$$\begin{aligned} f(\{0,1\}) &= \{f(x)/x \in \{0,1\}\} \\ &= \{f(0), f(1)\} \\ &= \{5,7\}. \end{aligned}$$

$$f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 5\} = \{x \in \mathbb{R}/2x + 5 = 5\} = \{0\}$$

Comme f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$f([0, 1]) = \{f(x)/x \in [0, 1]\} = [f(0), f(1)] = [5, 7].$$

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x)/x \in \mathbb{R}) =\} =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=] - \infty, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([5,7]) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in [5,7]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/2x + 5 \in [5,7]\} \end{aligned}$$

$$2x+5 \in [5,7] \Longleftrightarrow 5 \leq 2x+5 \leq 7 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \leq 7 \ldots .(1) \\ \text{et} \\ 2x+5 \geq 5 \ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Longleftrightarrow 2x+5 \leq 7 \\ &\Longleftrightarrow x \leq 1 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 1] \\ (2) &\Longleftrightarrow 2x+5 \geq 5 \\ &\Longleftrightarrow x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in]0, +\infty] \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}([5,7]) =]-\infty, 1] \cap]0, +\infty] = [0,1]$
4. Calculons $g^{-1}(\{1\})$, $g([-4,4])$,, $g^{-1}([-4,-1])$ et $g^{-1}([0,4[)$.

- $g^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}/g(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}/\frac{1}{x^2+1} = 1\} = \{0\}$
  g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$. en effet :
  $g'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

-
$$\begin{aligned} g([-4,4]) = \{g(x)/x \in [-4,4]\} &= \{g(x)/x \in [-4,0] \cup]0,4]\} \\ &= \{g(x)/x \in [-4,0]\} \cup \{g(x)/x \in]0,4]\} \\ &= [g(-4), g(0)] \cup [g(4), g(0)[\\ &= \left[\frac{1}{17}, 1\right] \cup \left] \frac{1}{17}, 1\right] \\ &= \left[\frac{1}{17}, 1\right]. \end{aligned}$$
- $g^{-1}([-4,-1]) = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \in [-4,-1]\} = \emptyset$ car $g(x) > 0$.
- $g^{-1}\left([0,4[\right) = g^{-1}(]0,1[) = \mathbb{R}$ car : $0 < g(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice n°6.

Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifions que pour tout réel a non nul on a : $h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$h(a) - h\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4a}{a^2+1} - \frac{4\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1} = 0 \Rightarrow h(a) = h\left(\frac{1}{a}\right).$$

On en déduit que h n'est pas injective car par exemple : pour $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}, x_1 \neq x_2$ mais d'après la question précédente $h(2) = h\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$par $f(x) = h(x)$.
a) Montrons que f est injective.

$$\forall x_1, x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Soient $x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2)$. on a :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1} \\ &\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 = x_2) \,\text{ou}\left(x_1 = \frac{1}{x_2}\right) \end{aligned}$$

si $x_1 = \frac{1}{x_2}$ et $x_1, x_2 \in I$ ce ci entraine que $x_1 = x_2 = 1$. Donc f est injective.
b) Vérifions que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$
Soit $x \in I$

$$f(x) - 2 = \frac{-2(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 2.$$

c) Montrons que f est une bijection de I sur $]0,2]$ et déterminons $f^{-1}(x)$.
On a : f est injective, de plus f est surjective
$\forall y \in]0,2], \exists x \in [1,+\infty[$ tel que : $f(x) = y$.
En effet :

$$\frac{4x}{x^2+1} = y \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0,$$

$\Delta = 16 - 4y^2 \geq 0$ car : $y \in]\,0,2]$.
Alors l'équation $yx^2 - 4x + y = 0$ admet deux solutions

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} \text{ ou } x_2 = \frac{2-\sqrt{4-y^2}}{y}$$

Comme $y \in]0,2]$, donc on prend $x_1 \in [1,+\infty[$ et on rejette x_2 car $x_2 \notin [1,+\infty[$. En effet

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{4-y^2}}{y} = \frac{y}{2+\sqrt{4-y^2}} = \frac{1}{x_1} \notin [1,+\infty[.$$

Donc $\forall y \in]0,2], \exists x = x_1 = \dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} \in [1,+\infty[$: tel que $f(x) = y$.

Conclusion : f est bijective car elle est injective et surjective.
De plus l'application réciproque est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad &]0,2] \to [1,+\infty[\\ & x \to f^{-1}(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}. \end{aligned}$$