Chapitre 2

Nombres Complexes

2.1 Introduction

L'équation $x^2 + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}$ n'admet pas de solution. Donc, il faut ici considérer l'ensemble plus large $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

2.2 L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

2.2.1 Définition d'un nombre complexe

Définition 2.1 *Un nombre complexe est un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que l'on notera par $z = x + iy$ ou $i^2 = -1$. Cette écriture du nombre complexe z est unique et est appelée forme algébrique ou cartésienne de z, de plus*

$x \equiv \operatorname{Re} z$ *: est appelée la partie réelle de z.*

$y \equiv \operatorname{Im} z$ *: est appelée la partie imaginaire de z.*

On écrit aussi $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Si $y = 0$, alors $z = x$. Dans ce cas on dira que z est réel.

Si $x = 0$, alors $z = y$. Dans ce cas on dira que z est imaginaire pur.

Exemple 2.1 $z = 2 + 3i$, $z = -2i$, $z = 0$, $z = \sqrt{7} + \frac{3}{2}i$, $z = 9$ *sont des nombres complexes.*

2.2.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

Addition :

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i\,(y + y')\,.$$

Multiplication :

$$z.z' = (x + iy)\,(x' + iy') = (xx' - yy') + i\,(xy' + x'y)\,.$$

On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle avec la convention suivante : $i^2 = -1$.

Multiplication par un scalaire : $\lambda z = (\lambda x) + i\,(\lambda y)$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2.2 *Soient* $z_1 = 3+2i$ *et* $z_2 = \frac{1}{2}+4i$ *deux nombres complexes. On a :*

$$z_1 + z_2 = (3+2i) + \left(\tfrac{1}{2}+4i\right) = \tfrac{7}{2}+6i$$

$$z_1 z_2 = (3+2i)\left(\tfrac{1}{2}+4i\right) = -\tfrac{13}{2}+13i$$

$$z_1^2 = (3+2i)^2 = 5+12i$$

Remarque :

- On dit que $z = z'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls.

Définition 2.2 *(Conjugué d'un nombre complexe).*

Soit $z = x+iy$ *un nombre complexe avec* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On appelle conjugué de* z *et on note* $\overline{z}$ *le complexe* $\overline{z} = x - iy$.

Propriétés.

Soient z et z' deux nombres complexe, alors on a :

1) $\overline{\overline{z}} = z$	4) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
2) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	5) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$
3) $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$	6) $z - \overline{z} = 2\operatorname{Im} z$

Exemple 2.3 *Soient* $z_1 = 1+2i$ *et* $z_2 = 4-3i$ *deux nombres complexes. On a :*
$\overline{z}_1 = \overline{(1+2i)} = 1-2i$, $\overline{z}_2 = \overline{(4-3i)} = 4+3i$

Exercise 2.4 *Donner la forme algébrique des complexes suivants :*

1) $z_1 = (4-i)(2+3i)$	3) $z_3 = \dfrac{1+i}{3+2i}$
2) $z_2 = (a+bi)^2$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$	4) $z_4 = \dfrac{1+2i}{1-i} + \dfrac{1+i}{2+3i}$

Solution.

$$\begin{aligned}
z_1 &= (4-i)(2+3i) = 11+10i \\
z_2 &= (a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi \\
z_3 &= \frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{5}{13}+\frac{1}{13}i \\
z_4 &= \frac{1+2i}{1-i}+\frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\
&= \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{5}{13}-\frac{1}{13}i\right) = -\frac{3}{26}+\frac{37}{26}i
\end{aligned}$$

Définition 2.3 *(Module d'un nombre complexe)*

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe.

On appelle module de z et on note $|z|$ le nombre réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexe, alors on :

1) $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}}$.	5) $\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$, avec $z \neq 0$.
2) $\lvert z\rvert \geq 0$.	6) $\left\lvert \frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$, avec $z' \neq 0$.
3) $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$.	7) $\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$
4) $\lvert z.z'\rvert = \lvert z\rvert . \lvert z'\rvert$.	8) $\lvert \lvert z\rvert - \lvert z'\rvert \rvert \leq \lvert z-z'\rvert$.

Exemple 2.5 *Soient $z_1 = -1+2i$ et $z_2 = 2-3i$ deux nombres complexes. On*

a :

$$|z_1| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = |2-3i| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|-1+2i|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$$

2.2.3 Le plan complexe

Soit le plan (P) muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M(x, y)$ de coordonnées (x, y) . Par définition :

- Le point M est l'image de z.

- Le nombre z est l'affixe du point M.

D'après le théorème de Pythagore, on a $OM^2 = x^2+y^2$ c'est a dire $OM = |z|$.

2.2.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 2.4 *Soit z un nombre complexe non nul.*

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ *toute mesure θ dans* $[0, 2\pi]$ *de l'angle* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$, *et on écrit* $\arg(z) = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$, *(on écrit aussi* $\arg(z) = \theta\,[\pi]$*). et on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|}, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

On appelle forme trigonométrique de z la représentation suivante :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ ou } r = |z| \text{ et } \theta = \arg z$$

On note aussi la forme trigonométrique d'un complexe z par $z = [r, \theta]$.

Propriétés.

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes sous forme trigonométrique, alors on a :

1) $z = z'$ si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta'$.

2) $z.z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.

3) $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), n \in \mathbb{N}$. (formule de Moivre).

4) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ avec $z \neq 0$.

5) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta'))$ avec $z' \neq 0$.

Notation exponentielle

Pour tout réel θ, nous définissons la notation exponentielle par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Donc tout nombre complexe s'écrit sous la forme exponentielle suivante : $z = re^{i\theta}$.

Exercise 2.6 *I) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle des complexes suivants :*

1) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ 3) $z_3 = z_1 z_2$

2) $z_2 = 1 - i$ 4) $z_4 = \dfrac{z_1^4}{z_2}$

II) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} \quad et \quad B = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}.$$

III) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équations suivantes :

1) $z - 2(2 + i)\overline{z} + 6 + 8i = 0$

2) $iz^2 - 2\overline{z} - i = 0$

Solution.

I) Donnons la forme trigonométrique et la forme exponentielle des complexes suivants :

1) On a : $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$*, donc* $|z_1| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$
Soit $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_1*, donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}, \\ \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

D'où $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_1.$$

et

$$z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ est la forme exponentielle de } z_1.$$

2) On a : $z_2 = 1 - i$*, donc* $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_2*, donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

On obtient : $\theta_2 = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_2.$$

et

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}} \text{ est la forme exponentielle de } z_2.$$

3) On a :

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 z_2 \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \text{ est la forme trigonométriques de } z_3. \end{aligned}$$

et $z_3 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ *est la forme exponentielle de* z_3.

4) On a :

$$\begin{aligned}
z_4 &= \frac{z_1^4}{z_2} = \frac{\left(4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{4^4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)} = \frac{256}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= = \frac{256}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \textit{ est la forme trigonométriques de } z_4.
\end{aligned}$$

et $z_4 = \frac{256}{\sqrt{2}} e^{i\frac{19\pi}{12}}$ *est la forme exponentielle de* z_4.

II) Calculons la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} &= \left(4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{2022} \\
&= 4^{2022}\left(\cos\frac{7\,(2022)\,\pi}{12} + i\sin\frac{7\,(2022)\,\pi}{12}\right) \\
&= 4^{2022}\left(\cos\left(1178\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(1178\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) \\
&= 4^{2022}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -4^{2022}i.
\end{aligned}$$

On obtient : $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022} = -4^{2022}i$ *est la forme algébrique de* A.

On conclut que la partie réelle de A *est nulle et que la partie imaginaire de* A *est* -4^{2022}.

Calculons la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$B = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024}$$

On a :

$$\begin{aligned}
B = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024} &= \left(4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^{2024} \\
&= 4^{2024}\left(\cos\left(\frac{7\,(2024)\,\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\,(2024)\,\pi}{12}\right)\right) \\
&= 4^{2024}\left(\cos\left(1180\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(1180\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= 4^{2024}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= 4^{2024}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{4^{2023}}{2} + i\frac{4^{2024}\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

On obtient : $B = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2024} = -\frac{4^{2024}}{2} + i\frac{4^{2024}\sqrt{3}}{2}$ *est la forme algébrique de* B.

On conclut que la partie réelle de B est $-\dfrac{4^{2024}}{2}$ *et que la partie imaginaire de A est* $\dfrac{4^{2024}\sqrt{3}}{2}$.

III) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équations suivantes :

1) Résolvons l'équation :

$$z - 2(2+i)\overline{z} + 6 + 8i = 0.$$

On pose $z = x + iy$ donc $\overline{z} = x - iy$

$$\begin{aligned} z - 2(2+i)\overline{z} + 6 + 8i = 0 &\Leftrightarrow (x+iy) - 2(2+i)(x-iy) + 6 + 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow (-3x - 2y + 6) + (8 - 2x + 5y)\, i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y + 6 = 0 \ldots\ldots (1) \\ -2x + 5y + 8 = 0 \ldots\ldots (2) \end{cases} \end{aligned}$$

de (1) *on a :* $x = -\dfrac{2}{3}y + 2$, *on remplace dans* (2) *on obtient :*

$$-2\left(-\frac{2}{3}y + 2\right) + 5y + 8 = 0 \Rightarrow \frac{19}{3}y + 4 = 0,$$

donc, $y = -\dfrac{12}{19}$ *d'où* $x = -\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{12}{19}\right) + 2 = \dfrac{46}{19}$.

Alors, la solution de l'équation est $z = \dfrac{46}{19} - \dfrac{12}{19}i$.

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$iz^2 - 2\overline{z} - i = 0.$$

On pose $z = x + iy$ donc $\overline{z} = x - iy$

On a :

$$
\begin{aligned}
iz^2 - 2\overline{z} - i = 0 \ &\Rightarrow \ i\,(x+iy)^2 - 2\,(x-iy) - i = 0 \\
&\Rightarrow \ i\,(x^2 - y^2 + 2xyi) - 2\,(x-iy) - i = 0 \\
&\Rightarrow \ x^2 i - y^2 i - 2xy - 2x + 2yi - i = 0 \\
&\Rightarrow \ (-2xy - 2x) + i\,(x^2 - y^2 + 2y - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \ \begin{cases} -2xy - 2x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \\ x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \ldots\ldots\ (2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \ \begin{cases} x\,(y+1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \\ x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \ldots\ldots\ (2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

de l'équation (1) *on a :* $x = 0$ *ou* $y = -1$
en remplace dans l'équation (2) *on obtient :*
Si $x = 0$, *on aura*

$$
\begin{aligned}
-y^2 + 2y - 1 = 0 \ &\Rightarrow \ y^2 - 2y + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \ (y-1)^2 = 0
\end{aligned}
$$

donc, $y = 1$.
Si $y = -1$, *on aura* $x^2 - 1 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$, *donc* $x = 2$ *ou* $x = -2$
Alors, la solution de l'équation est $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$ *et* $z_3 = -2 - i$

2.3 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

2.3.1 Equations du second degré à coefficients réels

Proposition 2.1 *L'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0 \ldots\ldots\ldots\ (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $a \neq 0$, *possède deux racines* z_1 *et* z_2.

Soit $\triangle = b^2 - 4ac$ *le discriminant.*

Si $\triangle > 0$, *alors l'équation* (E) *possède deux racines réelles sont*

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

Si $\triangle < 0$, *alors l'équation* (E) *possède deux racines complexes conjugués sont*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\triangle}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\triangle}}{2a}.$$

Et si $\triangle = 0$ *alors* (E) *possède une solution réelle double* $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

Exercise 2.7 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

$$1)\quad z^2 - 5z + 6 = 0, \qquad 2)\quad z^2 - 2z + 5 = 0, \qquad 3)\quad z^2 - 2z + 1 = 0$$

Solution.

1) Résolvons l'équation : $z^2 - 5z + 6 = 0.....(1)$

On a : $\triangle = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 > 0$, *alors l'équation* (1) *possède deux racines réelles sont*

$$z_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad et \qquad z_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

2) Résolvons l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0.....(2)$

On a : $\triangle = (-2)^2 - 4(1)(5) = -16 = (4i)^2$, *alors l'équation* (E) *possède deux racines complexes conjugués sont*

$$z_1 = \frac{-(-2) - 4i}{2(1)} = 1 - 2i \qquad et \qquad z_2 = \frac{-(-2) + 4i}{2(1)} = 1 + 2i.$$

3)Résolvons l'équation : $\frac{1}{8}z^2 - z + 2 = 0.....(3)$

On a : $\triangle = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right)(2) = 0$, *alors* (3) *possède une solution réelle double* $z_1 = z_2 = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = 4$.

2.4 Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe

2.4.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $Z = a + ib$ un complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle racines carrées de Z, les solutions z dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 = Z$.

Méthode de résolution algébrique de $z^2 = Z$.

Posons $Z = a + ib$ et désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z. On a :

$$\begin{aligned} z^2 = Z &\iff (x+iy)^2 = a + ib \\ &\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib \end{aligned}$$

D'où

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2xy = b & \ldots\ldots \quad (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les racines carrées z de Z.

Méthode de résolution trigonométrique de $z^2 = Z$.

Soit $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un complexe. Le nombre complexe $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est la racine de $z^2 = Z$, on a :

$$z^2 = Z \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$

d'où

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \\ \alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi / k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation $z^2 = Z$ sont :

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right).$$

Exemple 2.8 *Déterminer les racines carrées de $-3 + 4i$, par la méthode de résolution algébrique.*

Désignons par $x + iy$ une des racines carrées de Z. On a :

$$\begin{aligned} z^2 = -3 + 4i &\iff (x+iy)^2 = -3 + 4i, \\ &\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = -3 + 4i, \end{aligned}$$

d'où

$$z^2 = Z \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & ...... \quad (1) \\ 2xy = 4 & ...... \quad (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & ...... \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2x^2 = 2$ *où* $x = 1$ *ou* $x = -1$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{array}{l} Si \quad x = 1 \text{ on obtient } \quad y = \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ Si \quad x = -1 \text{ on obtient } \quad y = \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{-1} = -2 \end{array}$$

Alors, les racines carrées de $-3 + 4i$ *sont :*

$$z_1 = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - 2i.$$

Exemple 2.9 *Déterminer les racines carrées de* $Z = -1 + \sqrt{3}i$, *par la méthode de résolution trigonométrique.*

On écrit d'abord Z *sous la forme trigonométrique.*

$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, *soit* $\theta \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* Z, *donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-1}{2}, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \quad D'o\grave{u} \;\; \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}.$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{est la forme trigonométriques de } Z.$$

Le nombre complexe $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *est la racine de* $z^2 = Z$, *on a :*

$$z^2 = Z \Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$$

d'où

$$\begin{cases} \rho^2 = 2 \\ \\ 2\alpha = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \\ \alpha = \dfrac{\pi}{3} + k\pi/k \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Alors, les racines carrées de $-1 + \sqrt{3}i$ *sont :*

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad et \quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

2.4.2 Equations du second degré à coefficients complexes

Proposition 2.2 *L'équation du second degré*

$$az^2 + bz + c = 0 \ldots\ldots\ldots (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ *et* $a \neq 0$*, possède deux solutions* z_1 *et* z_2 *dans* $\mathbb{C}$*.*

Soit $\triangle = b^2 - 4ac$ *le discriminant et* δ *une racine carrée de* $\triangle$*. Alors les solutions sont*

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Et si $\triangle = 0$ *alors* (E) *possède une solution double* $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$*.*

Exercise 2.10 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :*

$$z^2 - (3 + 4i)\, z - (1 - 5i) = 0 \tag{2.1}$$

Solution.

Le discriminant vaut

$$\triangle = (3 + 4i)^2 + 4\,(1)\,(1 - 5i) = -3 + 4i$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$*. On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = -3 + 4i &\iff (a + ib)^2 = -3 + 4i \\ &\iff (a^2 - b^2) + i\,(2ab) = -3 + 4i \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2ab = 4 & \ldots\ldots \quad (2) \\ a^2 + b^2 = 5 & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 2$ *où* $a = 1$ *ou* $a = -1$*, de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad a = 1 \text{ on obtient} \quad b = \frac{2}{a} = \frac{2}{1} = 2 \\ &\text{Si} \quad a = -1 \text{ on obtient} \quad b = \frac{2}{a} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

Donc, $\delta = 1 + 2i$ *ou* $\delta = -1 - 2i$*, alors l'équation* (2.1) *possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{(3 + 4i) + (1 + 2i)}{2\,(1)} = 2 + 3i$$

$$\text{et}$$

$$z_2 = \frac{(3 + 4i) - (1 + 2i)}{2\,(1)} = 1 + i$$

2.4.3 Racines n^{ièmes} d'un nombre complexe

Soit $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un complexe. On appelle racines n^{ièmes} de Z, les solutions z dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n = Z$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.

Posons $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est la racine de $z^n = Z$, on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

d'où

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ \\ n\alpha = \theta + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \\ \alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} / 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = Z$ sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) / 0 \leq k \leq n-1.$$

2.4.4 Racines $n^{ièmes}$ de l'unité

Les racines $n^{ièmes}$ de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$. Les solutions de cette équation sont : z_0, z_1, ..., z_{n-1} où

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) / 0 \leq k \leq n-1.$$

Exemple 2.11 *Trouver les racines cubiques de $Z = 1$, et vérifier que la sommes de ces racines et nul.*

On écrit d'abord Z sous la forme trigonométriques.

On a :

$$|Z| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = 1$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ l'argument de 1, donc :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|Z|} = \dfrac{1}{1} = 1, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|Z|} = \dfrac{0}{1} = 0. \end{cases}$$

On obtient : $\theta = 0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$. *on écrit aussi :* $2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z = 1 (\cos 0 + i \sin 0) \text{ est la forme trigonométriques de } 1.$$

Cherchons $z = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ *tel que* $z^3 = 1$, *d'où*

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ \\ 3\alpha = 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Cas $k = 0$, *on aura :* $\alpha = 0$ *donc :*

$$z_0 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1.$$

Cas $k = 1$, *on aura :* $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ *donc :*

$$z_1 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \equiv j.$$

Cas $k = 2$, *on aura :* $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$ *donc :*

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = e^{\frac{4\pi i}{3}} \equiv j^2.$$

Conclusion : les racines cubiques de 1 *sont :* 1, j *et* j^2
Vérifions que :$1 + j + j^2 = 0$
On a :

$$1 + j + j^2 = j^3 + j + j^2 = j (1 + j + j^2), \text{ car } j^3 = 1$$

donc,

$$(j - 1)(1 + j + j^2) = 0, \text{ d'où } 1 + j + j^2 = 0 \text{ car } j \neq 1$$

Exemple 2.12 *Trouver les 5-racines de* $Z = 16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$.
On écrit d'abord Z *sous la forme trigonométriques.*
On a :

$$|Z| = \sqrt{\left(16\sqrt{2}\right)^2 + \left(16\sqrt{2}\right)^2} = 32$$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* Z*, donc :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|Z|} = \dfrac{16\sqrt{2}}{32} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|Z|} = \dfrac{-16\sqrt{2}}{32} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

On obtient : $\theta = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$*. on écrit aussi :* $\theta = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$*.*

$z = 32\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ *est la forme trigonométriques de* Z*.*

Cherchons $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *tel que* $z^5 = Z$*, d'où*

$$\begin{cases} \rho^5 = 32 \\ \\ 5\alpha = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \\ \alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Cas $k = 0$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20}$ *donc :*

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right).$$

Cas $k = 1$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{4}$ *donc :*

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Cas $k = 2$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2(2)\pi}{5} = \dfrac{23\pi}{20}$ *donc :*

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right).$$

Cas $k = 3$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2(3)\pi}{5} = \dfrac{31\pi}{20}$ *donc :*

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right).$$

Cas $k = 4$*, on aura :* $\alpha = \dfrac{7\pi}{20} + \dfrac{2(4)\pi}{5} = \dfrac{39\pi}{20}$ *donc :*

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\sin\frac{39\pi}{20}\right).$$

Conclusion : L'ensemble solutions de l'équation $z^5 = Z$ *est :*

$$\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}.$$

2.5 Exercices

Exercise 2.13 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

1) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0.$

2) $z^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$

3) $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin\alpha)e^{i\alpha} = 0,$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}.$

4) $z^4 - (15+30i)z^2 - 88 + 234i = 0$ *cette équation est dite bicarrée.*

5) $2z^3 - (1-i)z^2 + (1+i)z + 2i = 0,$ *sachant qu'elle à une racine imaginaire pur.*

Solution.

1) Résolvons l'équation

$$z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = 4(2+i)^2 - 4(1)(6+8i) = -12 - 16i$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$*. On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = -12 - 16i &\iff (a+ib)^2 = -12 - 16i \\ &\iff (a^2 - b^2) + i(2ab) = -12 - 16i \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -12 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2ab = -16 & \ldots\ldots \ (2) \\ a^2 + b^2 = 20 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 8$ *où* $a = 2$ *ou* $a = -2$*, de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &Si \quad a = 2 \text{ on obtient} \quad b = \frac{-8}{a} = \frac{-8}{2} = -4 \\ &Si \quad a = -2 \text{ on obtient} \quad b = \frac{-8}{a} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{aligned}$$

Donc, $\delta = 2-4i$ *ou* $\delta = -2+4i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{2(2+i)+(2-4i)}{2(1)} = 3-i$$

et

$$z_2 = \frac{2(2+i)-(2-4i)}{2(1)} = 1+3i$$

2) Résolvons l'équation suivante :

$$z^2 - \left(1+i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = \left(1+i\sqrt{3}\right)^2 - 4(1)\left(-1+i\sqrt{3}\right) = 2-2i\sqrt{3}$$

Soit $\delta = a+ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = 2-2i\sqrt{3} &\iff (a+ib)^2 = 2-2i\sqrt{3} \\ &\iff (a^2-b^2)+i(2ab) = 2-2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3+4i \iff \begin{cases} a^2-b^2 = 2 & \ldots\ldots\ (1) \\ 2ab = -2\sqrt{3} & \ldots\ldots\ (2) \\ a^2+b^2 = 4 & \ldots\ldots\ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 6$ *où* $a = \sqrt{3}$ *ou* $a = -\sqrt{3}$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\text{Si}\quad a = \sqrt{3} \text{ on obtient }\quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1$$

$$\text{Si}\quad a = -\sqrt{3} \text{ on obtient }\quad b = \frac{-8}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$$

Donc, $\delta = \sqrt{3}-i$ *ou* $\delta = -\sqrt{3}+i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

et

$$z_2 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-i\right)}{2(1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

3) Résolvons l'équation suivante :

$$z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i(\sin\alpha)e^{i\alpha} = 0, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant vaut

$$\begin{aligned}
\triangle &= \left(2e^{i\alpha}\right)^2 - 4\,(1)\left(2i\,(\sin\alpha)\,e^{i\alpha}\right) \\
&= 4\left(e^{i\alpha} - 2i\sin\alpha\right)e^{i\alpha} = 4\left(e^{i\alpha} - 2i\sin\alpha\right)e^{i\alpha} \\
&= 4\left(\cos\alpha + i\sin\alpha - 2i\sin\alpha\right)e^{i\alpha} = 4\left(\cos\alpha - i\sin\alpha\right)e^{i\alpha} \\
&= 4\left(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right)e^{i\alpha} = 4e^{-i\alpha}e^{i\alpha} = 4 = (2)^2\,.
\end{aligned}$$

Alors l'équation possède deux racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{2e^{i\alpha}+2}{2\,(1)} = 1 + e^{i\alpha} \qquad et \qquad z_2 = \frac{2e^{i\alpha}-2}{2\,(1)} = -1 + e^{i\alpha}.$$

4) Résolvons l'équation suivante :

$$z^4 - (15+30i)\,z^2 - 88 + 234i = 0.$$

cette équation est dite bicarrée.

On pose d'abord $W = z^2$, donc l'équation bicarrée devient :

$$W^2 - (15+30i)\,W - 88 + 234i = 0$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = (15+30i)^2 - 4\,(1)\,(-88+234i) = -323 - 36i$$

Soit $\delta = a + ib$ une des racines carrées de $\triangle$. On a :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -323 - 36i &\iff (a+ib)^2 = -323 - 36i \\
&\iff \left(a^2 - b^2\right) + i\,(2ab) = -323 - 36i
\end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -323 - 36i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -323 & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2ab = -36 & \ldots\ldots \quad (2) \\ a^2 + b^2 = 325 & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

De (1) et (3) on a : $2a^2 = 2$ où $a = 1$ ou $a = -1$, de l'équation (2) on aura :

$$\begin{aligned}
&Si \quad a = 1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-18}{a} = \frac{-18}{1} = -18 \\
&Si \quad a = -1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-18}{a} = \frac{-18}{-1} = 18
\end{aligned}$$

Donc, $\delta = 1 - 18i$ *ou* $\delta = -1 + 18i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{(15+30i)+(1-18i)}{2\,(1)} = 8+6i \\ &et \\ W_2 &= \frac{(15+30i)-(1-18i)}{2\,(1)} = 7+24i \end{aligned}$$

Mais on a : $W = z^2$.

Cas 1 : $W = 8+6i = z^2$, *on pose* $z = x+iy$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} z^2 = 8+6i &\iff (x+iy)^2 = 8+6i \\ &\iff (x^2-y^2)+i\,(2xy) = 8+6i \end{aligned}$$

D'où

$$z^2 = 8+6i \iff \begin{cases} x^2-y^2 = 8 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2xy = 6 & \ldots\ldots \ (2) \\ x^2+y^2 = 10 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2x^2 = 18$ *où* $x_1 = 3$ *ou* $x_2 = -3$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &Si \quad x_1 = 3 \text{ on obtient } \quad y_1 = \frac{3}{x_1} = \frac{3}{3} = 1 \\ &Si \quad x_2 = -3 \text{ on obtient } \quad y_2 = \frac{3}{x_2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

Donc on aura

$$z_1 = 3+i \qquad et \quad z_2 = -3-i$$

Cas 2 : $W = 7+24i = z^2$, *on pose* $z = x+iy$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} z^2 = 7+24i &\iff (x+iy)^2 = 7+24i \\ &\iff (x^2-y^2)+i\,(2xy) = 7+24i \end{aligned}$$

D'où

$$z^2 = 7+24i \iff \begin{cases} x^2-y^2 = 7 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2xy = 24 & \ldots\ldots \ (2) \\ x^2+y^2 = 25 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2x^2 = 32$ *où* $= 4$ *ou* $x_4 = -4$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned} &Si \quad x_3 = 4 \text{ on obtient } \quad y_3 = \frac{12}{x_3} = \frac{12}{4} = 3 \\ &Si \quad x_4 = -4 \text{ on obtient } \quad y_4 = \frac{12}{x_4} = \frac{12}{-4} = -3 \end{aligned}$$

Donc on aura

$$z_3 = 4 + 3i \qquad et \quad z_4 = -4 - 3i$$

Alors les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = 3 + i \quad , \quad z_2 = -3 - i \ , \quad z_3 = 4 + 3i \qquad et \quad z_4 = -4 - 3i$$

5) Résolvons l'équation

$$2z^3 - (1 - i)\, z^2 + (1 + i)\, z + 2i = 0.$$

Sachant qu'elle à une racine imaginaire pur.

Soit $z_0 = \lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *la racine imaginaire pur de l'équation, donc on aura :*

$$\begin{aligned} 2z_0^3 - (1 - i)\, z_0^2 + (1 + i)\, z_0 + 2i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2i\lambda^3 + (1 - i)\, \lambda^2 + (-1 + i)\, \lambda + 2i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda^2 - \lambda\right) + \left(-2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2\right) i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda^2 - \lambda = \lambda\,(\lambda - 1) = 0 ....\,(1) \\ \\ -2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 2 = 0 ....\,(2) \end{cases} \end{aligned}$$

de (1) *on a :*$\lambda = 0$ *où* $\lambda = 1$. *Remplaçons* $\lambda = 0$ *dans l'équation* (2) *on obtient* $2 = 0$, *donc* $\lambda = 0$ *est rejeté.*

Remplaçons $\lambda = 1$ *dans l'équation* (2) *on obtient* $0 = 0$.

Donc $z_0 = i$ *est la racine imaginaire pur.*

Cherchons a, b *et* c *de* $\mathbb{C}$ *tel que :*

$$2z^3 - (1 - i)\, z^2 + (1 + i)\, z + 2i = (z - i)\left(az^2 + bz + c\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} 2z^3 - (1 - i)\, z^2 + (1 + i)\, z + 2i &= (z - i)\,(az^2 + bz + c) \\ &= az^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - ibz - ic \\ &= az^3 + (b - ai)\, z^2 + (c - ib)\, z - ic \end{aligned}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - ai = -1 + i \\ c - ib = 1 + i \\ -ic = 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - ai = -1 + i \\ c - ib = 1 + i \\ c = -2 \end{cases} \quad d'où \ \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 + 3i \\ c = -2 \end{cases}$$

donc l'équation devient :

$$(z-i)\left(2z^2+(-1+3i)\,z-2\right)=0$$

Résolvons l'équation

$$2z^2+(-1+3i)\,z-2=0.$$

Le discriminant vaut

$$\triangle=(-1+3i)^2-4\,(2)\,(-2)=8-6i$$

Soit $\delta=a+ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$*. On a :*

$$\begin{aligned}\delta^2=8-6i &\iff (a+ib)^2=8-6i\\ &\iff (a^2-b^2)+i\,(2ab)=8-6i\end{aligned}$$

D'où,

$$\delta^2=-3+4i\iff\begin{cases}a^2-b^2=8 & ...... & (1)\\ 2ab=-6 & ...... & (2)\\ a^2+b^2=10 & ...... & (3)\end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2=18$ *où* $a=3$ *ou* $a=-3$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\begin{aligned}&Si\quad a=3 \text{ on obtient}\quad b=\frac{-3}{a}=\frac{-3}{3}=-1\\ &Si\quad a=-3 \text{ on obtient}\quad b=\frac{-3}{a}=\frac{-3}{-3}=1\end{aligned}$$

Donc, $\delta=3-i$ *ou* $\delta=-3+i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1=\frac{-(-1+3i)+(3-i)}{2\,(2)}=1-i\qquad et\ \ z_2=\frac{-(-1+3i)-(3-i)}{2\,(2)}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Alors les solutions de l'équation sont :

$$z_0=i\quad,\quad z_1=1-i\qquad et\quad z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Exercise 2.14 *Soit* $z\in\mathbb{C}$, *on pose :*

$$P\,(z)=z^4+2z^3+2z^2-2z+1.$$

1) Déterminer les réels a *et* b *tel que :*

$$\forall z\in\mathbb{C}^*:P\,(z)=z^2\left(\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+a\left(z-\frac{1}{z}\right)+b\right).$$

2) Résoudre l'équation $U^2 + aU + b = 0$, puis l'équation $P(z) = 0$.
Solution : *Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1.$$

1) Déterminons les réels a et b tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right).$$

On a :

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right) \\ &= z^2 \left(\left(z^2 + \frac{1}{z^2} - 2 \right) + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right) \\ &= z^4 - 2z^2 + 1 + az^3 - az + bz^2 \\ &= z^4 + az^3 + (b-2) z^2 - az + 1 \end{aligned}$$

Par identification on obtient :$z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2 = 2 \\ -a = -2 \end{cases} \quad \text{donc,} \quad \begin{cases} a = 2 \\ \\ b = 4 \end{cases}$$

Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = z^2 \left(\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + 2 \left(z - \frac{1}{z} \right) + 4 \right).$$

2) Résolvons l'équation : $U^2 + 2U + 4 = 0$.
Le discriminant vaut

$$\triangle = (2)^2 - 4(1)(4) = -12 = \left(2\sqrt{3}i \right)^2,$$

alors l'équation possède deux racines complexes sont

$$U_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2(1)} = -1 + \sqrt{3}i \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2(1)} = -1 - \sqrt{3}i.$$

Résolvons l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = z^2\left(\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{z}\right) + 4\right) = 0.$$

On a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \ (\textit{rejeté car } z \in \mathbb{C}^*) \\ \\ \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{z}\right) + 4 = 0 \end{cases}$$

On pose $U = z - \frac{1}{z}$, *donc l'équation* $\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{z}\right) + 4 = 0$ *devient* $U^2 + 2U + 4 = 0$,

les racines de cette dernière équation sont $U_1 = -1 + \sqrt{3}i$ *et* $U_2 = -1 - \sqrt{3}i$

Cas 1 : $U_1 = -1 + \sqrt{3}i = z - \frac{1}{z}$, *on aura*

$$z - \frac{1}{z} = -1 + \sqrt{3}i \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = \left(-1 + \sqrt{3}i\right) z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + \left(1 - \sqrt{3}i\right) z - 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^2 - 4(1)(-1) = 2 - 2i\sqrt{3}$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = 2 - 2i\sqrt{3} &\iff (a + ib)^2 = 2 - 2i\sqrt{3} \\ &\iff \left(a^2 - b^2\right) + i(2ab) = 2 - 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & \ldots\ldots \ (1) \\ 2ab = -2\sqrt{3} & \ldots\ldots \ (2) \\ a^2 + b^2 = 4 & \ldots\ldots \ (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 6$ *où* $a = \sqrt{3}$ *ou* $a = -\sqrt{3}$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\textit{Si} \quad a = \sqrt{3} \textit{ on obtient} \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -1$$

$$\textit{Si} \quad a = -\sqrt{3} \textit{ on obtient} \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$$

Donc, $\delta = \sqrt{3} - i$ *ou* $\delta = -\sqrt{3} + i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_1 = \frac{\left(-1 + \sqrt{3}i\right) + \left(\sqrt{3} - i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_2 = \frac{-\left(1 - \sqrt{3}i\right) - \left(\sqrt{3} - i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Cas 2 : $U_2 = -1 - \sqrt{3}i = z - \frac{1}{z}$, *on aura*

$$z - \frac{1}{z} = -1 - \sqrt{3}i \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = -\left(1 + \sqrt{3}i\right) z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + \left(1 + \sqrt{3}i\right) z - 1 = 0$$

Le discriminant vaut

$$\triangle = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^2 - 4\,(1)\,(-1) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

Soit $\delta = a + ib$ *une des racines carrées de* $\triangle$. *On a :*

$$\begin{aligned} \delta^2 = 2 + 2i\sqrt{3} &\iff (a+ib)^2 = 2 + 2i\sqrt{3} \\ &\iff \left(a^2 - b^2\right) + i\,(2ab) = 2 + 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 & ...... \quad (1) \\ 2ab = 2\sqrt{3} & ...... \quad (2) \\ a^2 + b^2 = 4 & ...... \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 6$ *où* $a = \sqrt{3}$ *ou* $a = -\sqrt{3}$, *de l'équation* (2) *on aura :*

$$\text{Si} \quad a = \sqrt{3} \text{ on obtient} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\text{Si} \quad a = -\sqrt{3} \text{ on obtient} \quad b = \frac{-\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1$$

Donc, $\delta = \sqrt{3} + i$ *ou* $\delta = -\sqrt{3} - i$, *alors l'équation possède deux racines complexes sont*

$$z_3 = \frac{-\left(1 + \sqrt{3}i\right) + \left(\sqrt{3} + i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

et

$$z_4 = \frac{-\left(1 + \sqrt{3}i\right) - \left(\sqrt{3} + i\right)}{2\,(1)} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Alors les solutions de l'équation $P(z) = 0$ *sont :*

$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i \qquad z_2 \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \qquad z_4 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Exercise 2.15 *Soient* $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) Donner la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $z_1 z_2$

2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution.

I) Donnons la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $z_1 z_2$.

On a : $z_1 = 1+i$, *donc* $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Soit $\theta_1 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_1, *donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_1.$$

On a : $z_2 = \sqrt{3} - i$, *donc* $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_2, *donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}.$ *:*

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right) \text{ est la forme trigonométrique de } z_1.$$

On a :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left(2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right)\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \end{aligned}$$

est la forme trigonométrique de $z_1 z_2$.
2) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.
On écrit d'abord $z_1 z_2$ *sous la forme algébrique.*
On a :

$$z_1 z_2 = (1+i)\left(\sqrt{3} - i\right) = \left(1 + \sqrt{3}\right) + i\left(-1 + \sqrt{3}\right)$$

est la forme algébrique de $z_1 z_2$.

Par identification la forme algébrique et la forme trigonométrique de nombre $z_1 z_2$, *on obtient :*

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -1 + \sqrt{3} \end{cases} \quad d'où \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Exercise 2.16 *Soient* $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - i$ *deux nombres complexes.*
1) Donner la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{19\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{19\pi}{12}$.
3) Déterminer les racines carrées de : $z = -3 - 4i$.
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :* $(z^2+1)(iz^2 - 3z + 1 - 3i) = 0$.
Solution.
Soient $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - i$ *deux nombres complexes.*
I) Donnons la forme trigonométrique des complexes suivants : z_1, z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.
On a : $z_1 = -1 - \sqrt{3}i,$, *donc* $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$

Soit θ_1 *l'argument de* z_1*, donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{x_1}{|z_1|} = \dfrac{-1}{2} \\ \\ \sin\theta_1 = \dfrac{y_1}{|z_1|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_1 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Alors, $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ *est la forme trigonométrique de* z_1.

On a : $z_2 = 1 - i$*, donc* $|z_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
Soit $\theta_2 \in [0, 2\pi[$ *l'argument de* z_2*, donc on a :*

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{x_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \\ \sin\theta_2 = \dfrac{y_2}{|z_2|} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

D'où, $\theta_2 = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Alors, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$ *est la forme trigonométrique de* z_1.

On a : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)\right)$ *est la forme trigonométrique de* $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2) Déduisons les valeurs exactes de $\cos\dfrac{19\pi}{12}$ ***et*** $\sin\dfrac{19\pi}{12}$.

On écrit d'abord $\dfrac{z_1}{z_2}$ *sous la forme algébrique.*

$$\text{On a : } \frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i,$$

est la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Par identification la forme algébrique et la forme trigonométrique de nombre $\frac{z_1}{z_2}$*, on obtient :*

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \\ \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

3) Déterminons les racines carrées de : $z = -3-4i$.

Soit $\delta = a+ib$ *une des racines carrées de* z*. On a :*

$$\delta^2 = -3-4i \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = -3 & \ldots\ldots \quad (1) \\ 2ab = -4 & \ldots\ldots \quad (2) \\ a^2+b^2 = 5 & \ldots\ldots \quad (3) \end{cases}$$

De (1) *et* (3) *on a :* $2a^2 = 2$ *où* $a = 1$ *ou* $a = -1$*, de l'équation* (2) *on aura :*

$$\text{Si} \quad a = 1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-2}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$
$$\text{Si} \quad a = -1 \text{ on obtient } \quad b = \frac{-2}{a} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Donc, les deux racines carrées de $z = -3-4i$ *sont* $\delta_1 = 1-2i$ *et* $\delta_2 = -1+2i$

4) Résolvons dans $\mathbb{C}$ ***l'équation*** $(z^2+1)(iz^2-3z+1-3i) = 0$.

On a :

$$(z^2+1)(iz^2-3z+1-3i) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} z^2+1 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i \text{ ou } z_2 = -i \\ \\ iz^2-3z+1-3i = 0 \ldots\ldots (E) \end{cases}$$

Résolvons l'équation suivante : (E)

Le discriminant $\triangle = (-3)^2 - 4(i)(1-3i) = -3-4i$*, d'après la réponse précédente on a* $\delta_1 = 1-2i$ *est une racine carrée de* $\triangle$*, alors l'équation possède deux racines complexes sont :*

$$z_3 = \frac{3+(1-2i)}{2i} = \frac{4-2i}{2i} = \frac{2-i}{i} = 1-2i \quad \text{et}$$

$$z_4 = \frac{3-(1-2i)}{2i} = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = -1+i$$

Alors, $S = \{1-2i, -1+i\}$ *est l'ensemble de solution de l'équation* (E).

Donc on a : $\begin{cases} z^2+1=0 \\ \\ iz^2-3z+1-3i=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = i \text{ ou } z_2 = -i \\ \\ z_3 = -1+i \text{ ou } z_4 = 1-2i \end{cases}$

Alors, $S = \{-i,\ i,\ 1-2i,\ \ -1+i\}$ *est l'ensemble de solution de l'équation.*

Exercise 2.17 *Soit* $z \in \mathbb{C}$.

Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *dans chacun des cas suivants :*

$$1)\quad z^3 \in \mathbb{R}. \qquad\qquad 2)\quad z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}. \qquad\qquad 3)\ \frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R}.$$

Solution.

1) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *tel que :* $z^3 \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x+iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^3 = (x+iy)^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + \left(3x^2y - y^3\right) i.$$

Donc,

$$\begin{aligned} z^3 \in \mathbb{R} \ &\Leftrightarrow\ \operatorname{Im} z^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ 3x^2y - y^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ y\left(3x^2 - y^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ y\left(\sqrt{3}x - y\right)\left(\sqrt{3}x + y\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{3}x \\ y = -\sqrt{3}x \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x,y)$ *est la réunion des trois droites :* $y=0$, $y = \sqrt{3}x$ *et* $y = -\sqrt{3}x$.

2) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *tel que :* $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{x - iy}{(x+iy)(x-iy)} \\
&= x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y + \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2y + y^3 - y = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x, y)$ *est la réunion de cercle de centre* $O(0,0)$ *et de rayon* $r = 1$ *et de droite :* $y = 0$ *(l'axe d'abscisses) à l'exception le point* $O(0,0)$.

3) Déterminons dans le plan complexe, l'ensemble de points d'affixe z *tel que :* $\frac{1 - iz}{1 + iz} \in \mathbb{R}$.

On pose $z = x + iy$ *où* $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} &= \frac{1-i(x+iy)}{1+i(x+iy)} = \frac{1+y-ix}{1-y+ix} \\
&= \frac{(1+y-ix)(1-y-ix)}{(1-y+ix)(1-y-ix)} = \frac{(-x^2-y^2+1)-2xi}{(1-y)^2+x^2} \\
&= \frac{-x^2-y^2+1}{(1-y)^2+x^2} + i\frac{-2x}{(1-y)^2+x^2}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-2x}{(1-y)^2+x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (1-y)^2 + x^2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq 0 \text{ et } y \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(x, y)$ *est la droite :* $x = 0$ *(l'axe des ordonnées) à l'exception le point* $A(0, 1)$.