Université A/ MIRA de Béjaia — Année 2011-2012
Faculté de Technologie — Durée 2 heures
Département de Technologie 1ère année

Corrigé de l'examen de Maths1

Exercice n° 1. Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1).$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

   a) Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(x^2+1)$,

   donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}x$, d'où la Réflexivité de $\mathcal{R}$.

   b) Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$, on a

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{R}y & \Rightarrow & (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1) \\ & \Rightarrow & (y^3+2)(x^2+1) = (x^3+2)(y^2+1) \\ & \Rightarrow & y\mathcal{R}x. \end{array}$$

   Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, d'où la symétrie de $\mathcal{R}$.

   c) Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$x\mathcal{R}y \; et \; y\mathcal{R}z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^3+2)(y^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)........(1) \\ et \\ (y^3+2)(z^2+1) = (z^3+2)(y^2+1)........(2) \end{array} \right.$$

   En multipliant les égalités (1) et (2) membres à membres, on obtient

$$(x^3+2)(y^2+1)(y^3+2)(z^2+1) = (y^3+2)(x^2+1)(z^3+2)(y^2+1)$$

   et après simplification par $(y^2+1)(y^3+2)$ on obtient

$$(x^3+2)(z^2+1) = (x^2+1)(z^3+2),$$

   c'est à dire que $x\mathcal{R}z$.

   Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$, d'où la transitivité de $\mathcal{R}$.

   Finalement, de a), b) et c) $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. La classe d'équivalence de 0 :

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : (x^3+2)(0^2+1) = (0^3+2)(x^2+1)\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : x^3+2 = 2(x^2+1)\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : x^3-2x^2 = 0\} \\ & = & \{0, 2\}. \end{array}$$

Exercice n° 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ d'une loi de composition définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, \quad x * y = \alpha - (\alpha - x)(\alpha - y).$$

1. Résolution dans $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ de l'équation : $x * (\alpha - 1) = \alpha - 1$: On a

$$\begin{array}{rcl} x * (\alpha - 1) = \alpha - 1 & \Rightarrow & \alpha - (\alpha - x)[\alpha - (\alpha - 1)] = \alpha - 1 \\ & \Rightarrow & \alpha - (\alpha - x) = \alpha - 1 \\ & \Rightarrow & x = \alpha - 1. \end{array}$$

2. Montrons que $(\mathbb{R} - \{\alpha\}, *)$ est un groupe abélien.

a) $*$ est une L.C.I. ? : Soient $x, y \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$, montrons que

$$x * y = \alpha - (\alpha - x)(\alpha - y) \in \mathbb{R} - \{\alpha\}.$$

Il est clair que $x * y \in \mathbb{R}$. Montrons que $x * y \neq \alpha$. On raisonne par l'absurde, supposons que $x * y = \alpha$. On a

$$\begin{array}{rcl} x * y = \alpha & \Rightarrow & \alpha - (\alpha - x)(\alpha - y) = \alpha \\ & \Rightarrow & (\alpha - x)(\alpha - y) = 0 \\ & \Rightarrow & x = \alpha \; ou \; y = \alpha, contradiction \; car \; x, y \in \mathbb{R} - \{\alpha\}. \end{array}$$

D'où $*$ est une L.C.I dans $\mathbb{R} - \{\alpha\}$.

b) $*$ est commutative : En effet, soient $x, y \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$, on a

$$\begin{array}{rcl} x * y & = & \alpha - (\alpha - x)(\alpha - y) \\ & = & \alpha - (\alpha - y)(\alpha - x) \\ & = & y * x. \end{array}$$

Donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, \quad x * y = y * x,$$

d'où la commutativité de $*$.

c) $*$ est associative : En effet, soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$, on a

$$\begin{array}{rcl} (x * y) * z & = & [\alpha - (\alpha - x)(\alpha - y)] * z \\ & = & \alpha - (\alpha - [\alpha - (\alpha - x)(\alpha - y)])(\alpha - z) \\ & = & \alpha - (\alpha - x)(\alpha - y)(\alpha - z). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x * (y * z) & = & x * [\alpha - (\alpha - y)(\alpha - z)] \\ & = & \alpha - (\alpha - x)(\alpha - [\alpha - (\alpha - y)(\alpha - z)]) \\ & = & \alpha - (\alpha - x)(\alpha - y)(\alpha - z). \end{array}$$

Donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, \quad (x * y) * z = x * (y * z),$$

d'où l'associativité de $*$.

d) Existence de l'élément neutre : $\exists ? e \in \mathbb{R}-\{\alpha\} : \forall x \in \mathbb{R}-\{\alpha\}, x * e = e * x = x.$

Soit $x \in \mathbb{R}-\{\alpha\}$, compte tenu de la commutativité de $*$, on résoud l'équation

$$x * e = x.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} x * e = x & \Rightarrow & \alpha-(\alpha-x)(\alpha-e)=x \\ & \Rightarrow & \alpha-(\alpha^2-\alpha e-\alpha x+ex)=x \\ & \Rightarrow & \alpha-\alpha^2+\alpha e+\alpha x-ex=x \\ & \Rightarrow & e(\alpha-x)=x-\alpha x-\alpha+\alpha^2 \\ & \Rightarrow & e(\alpha-x)=(\alpha-x)(\alpha-1) \\ & \Rightarrow & e=\alpha-1, car x \neq \alpha. \end{array}$$

Donc $e=\alpha-1$ est l'élément neutre.

d) Tout élément de $\mathbb{R}-\{\alpha\}$ est symétrisable :
$\forall x \in \mathbb{R}-\{\alpha\}, \exists ? x' \in \mathbb{R}-\{\alpha\} : x * x' = x' * x = e = \alpha-1.$

Soit $x \in \mathbb{R}-\{\alpha\}$, compte tenu de la commutativité de $*$, on résoud l'équation

$$x * x' = \alpha-1.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} x * x' = \alpha-1 & \Rightarrow & \alpha-(\alpha-x)(\alpha-x')=\alpha-1 \\ & \Rightarrow & \alpha-(\alpha^2-\alpha x'-\alpha x+x'x)=\alpha-1 \\ & \Rightarrow & \alpha-\alpha^2+\alpha x'+\alpha x-x'x=\alpha-1 \\ & \Rightarrow & x'(\alpha-x)=-1-\alpha x+\alpha^2 \\ & \Rightarrow & x'=\frac{-1-\alpha x+\alpha^2}{\alpha-x}. \end{array}$$

On a $x' \neq \alpha$. En effet, on raisonne par l'absurde, supposons que $x'=\alpha$

$$\begin{array}{rcl} x'=\alpha & \Rightarrow & \frac{-1-\alpha x+\alpha^2}{\alpha-x}=\alpha \\ & \Rightarrow & -1-\alpha x+\alpha^2=-\alpha x+\alpha^2 \\ & \Rightarrow & -1=0, impossible. \end{array}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\{\alpha\}, \exists x'=\frac{-1-\alpha x+\alpha^2}{\alpha-x} \in \mathbb{R}-\{\alpha\} : x'$ est le symétrique de x.

Conclusion : a), b), c), d), e) $\Rightarrow (\mathbb{R}-\{\alpha\}, *)$ est un groupe abélien.

3. Considérons l'application

$$\begin{array}{rrcl} f : & (\mathbb{R}^*, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}-\{\alpha\}, *) \\ & x & \longmapsto & f(x)=\alpha-\frac{1}{x}. \end{array}$$

Montrons que f est un isomorphisme de groupes.

a)f est un homomorphisme de groupes : En effet, soient $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(xy)=\alpha-\frac{1}{xy}.$$

et

$$\begin{aligned} f(x)*f(y) &= \alpha-(\alpha-f(x))(\alpha-f(y)) \\ &= \alpha-[\alpha-(\alpha-\tfrac{1}{x})][\alpha-(\alpha-\tfrac{1}{y})] \\ &= \alpha-\tfrac{1}{x}\tfrac{1}{y} \\ &= \alpha-\tfrac{1}{xy}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{\alpha\},\quad f(xy)=f(x)*f(y).$$

b)f est une application injective : En effet, soient $x,y\in\mathbb{R}^*$ tels que $f(x)=f(y)$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) &\Rightarrow \alpha-\tfrac{1}{x}=\alpha-\tfrac{1}{y} \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{x}=\tfrac{1}{y} \\ &\Rightarrow x=y. \end{aligned}$$

c)f est une application surjective : En effet, soit $y\in\mathbb{R}-\{\alpha\}$, $\exists ?x\in\mathbb{R}^*$tels que $y=f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Rightarrow y=\alpha-\tfrac{1}{x} \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{x}=\alpha-y \\ &\Rightarrow x=\tfrac{1}{\alpha-y}. \end{aligned}$$

On a $x\neq 0$: En effet, supposons $x=0$ donc $\frac{1}{\alpha-y}=0$, ce qui est impossible. Donc $\forall y\in\mathbb{R}-\{\alpha\}$, $\exists x=\frac{1}{\alpha-y}\in\mathbb{R}^*$tels que $y=f(x)$.

Finalement, de a), b) et c) f est un isomorphisme de groupes.

Exercice n$^\circ$ 3. 1) On a $z=(\cos\theta-1)+i\sin\theta$, $\theta\in]0,2\pi[$.

a) $|z|^2=(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta=\cos^2\theta-2\cos\theta+1+\sin^2\theta.$

Comme $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ et $1-\cos\theta=2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, on obtient

$|z|^2=2(1-\cos\theta)=4sin^2(\frac{\theta}{2}).$

Ainsi $|z|=2|\sin\frac{\theta}{2}|=2\sin\frac{\theta}{2}$ puisque $\frac{\theta}{2}\in]0,\pi[$.

b) Pour $\theta\in]0,2\pi[$, on a

$$z=2\sin\frac{\theta}{2}(\frac{\cos\theta-1}{2\sin\frac{\theta}{2}}+i\frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}).$$

En utilisant $\cos\theta-1=-2\sin^2(\frac{\theta}{2})$ et $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, on a

$$z=2\sin\frac{\theta}{2}(-\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}).$$

Or $-\sin\frac{\theta}{2}=\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})$ et $\cos\frac{\theta}{2}=\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})$,

donc
$$z = 2\sin\frac{\theta}{2}[\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})]$$
ou encore sous forme exponentielle
$$z = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}.$$

2) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Soit $\delta = re^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = z$.

On a $r^2e^{i2\alpha} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

D'où :
$$\begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \{0,1\}. \end{cases}$$
Ainsi les racines carrées de $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ sont
$$\delta_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{3\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}[\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}]$$
et
$$\delta_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}[\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}]$$
Deuxième méthode pour le calcul des racines carrées de $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$.

Soit $\delta = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = z$.

On a $x^2 - y^2 + 2xyi = -1 + i$.

D'où :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$
L'ensemble des solutions de ce système d'équations est
$$S = \left\{ \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}, \frac{1}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}\right) \right\}.$$
Ainsi les racines carrées de $z = -1 + i$ sont
$$\delta_0 = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}$$
et
$$\delta_1 = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}.$$

Exercice n° 4. .

1. A l'aide du critère d'encadrement, démontrons que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}},\ n \geq 1$ est convergente et calculons sa limite.
   Soit $n \geq 1$, on a
   $$\forall k \geq 1, \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$
   par suite
   $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \geq 1,$$
   c'est à dire
   $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \forall n \geq 1,$$
   ou encore
   $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}, \forall n \geq 1.$$
   On a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$. En utilisant le critère des trois suites, on déduit que la suite (u_n) est convergente et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.
2. Soit (v_n) une suite qui converge vers ℓ ($\ell \neq 0$). La suite de terme général
   $$w_n = \left(\frac{1}{\cos\frac{n\pi}{5}}\right).v_n$$
   n'est pas convergente. En effet, on considère les suites extraites (x_n) et (y_n) où
   $$x_n = w_{10n} = \left(\frac{1}{\cos\frac{10n\pi}{5}}\right).v_{10n} = v_{10n}$$
   et
   $$y_n = w_{10n+5} = \left(\frac{1}{\cos\frac{(10n+5)\pi}{5}}\right).v_{10n+5} = -v_{10n+5}.$$
   On a
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \neq -\ell = \lim_{n\to\infty} y_n,$$
   d'où (w_n) est une suite divergente.
3. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :
   $$U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2k^2}, n > 1 \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{3n^2},\ n > 1.$$
   Montrons que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.
   Après calcul et simplification des termes identiques, on obtient $\forall n > 1$
   $$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2} > 0,$$

ce qui implique que la suite (U_n) est croissante.
On a aussi $\forall n > 1$

$$\begin{array}{rcl} V_{n+1} - V_n & = & U_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - U_n - \frac{1}{3n^2} \\ & = & U_{n+1} - U_n + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ & = & \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ & = & \frac{3+n^2-(n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} \\ & = & \frac{3+n^2-n^2-2n-1}{3n^2(n+1)^2} \\ & = & \frac{-2n+2}{3n^2(n+1)^2} < 0, \end{array}$$

donc

$$V_{n+1} - V_n < 0, \forall n > 1,$$

ce qui implique que la suite (V_n) est décroissante.
On a $\forall n > 1$, $V_n - U_n = \frac{1}{3n^2}$, donc

$$\lim_{n\to\infty}(V_n - U_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2} = 0.$$

Finalement, on a (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $\lim_{n\to\infty}(V_n - U_n) = 0$, d'où (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.
Conclusion : (U_n) et (V_n) sont convergentes et admettent la même limite.