

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université A. Mira - Bejaia
Faculté De Technologie
Département De Génie Civil

Polycopié de Résistance des Matériaux I cours et exercices corrigés

Matière : Résistance des Matériaux
Niveau : LMD - Deuxième Année Génie Civil
Présenté par : Dr KERNOU Nassim

Année universitaire 2023/2024

PREFACE

Le présent polycopié intitulé « *Polycopié de Résistance des Matériaux* », s'adresse essentiellement aux étudiants de la deuxième année *LMD* en Génie Civil. L'importance est accordée au dimensionnement des éléments d'une structure isostatiques simples réalisés en bois, en acier ou en béton et à la détermination des sollicitations qui permette à l'étudiant d'étudier les différentes sollicitations simples et la détermination des caractéristiques géométriques des sections en utilisant des méthodes simples à pratiquer.

Ce polycopié présente le cours de résistance des matériaux 1 (RDM 1), accompagné d'exercices corrigés. Il a été conçu dans le but de faciliter l'assimilation et la compréhension des concepts enseignés aux étudiants.

Ce document constitue un outil pédagogique clé, offrant à l'étudiant un support de révision pratique et accessible. Grâce aux exercices corrigés, il permet une application directe des théories étudiées, renforçant ainsi la maîtrise des notions de base de la résistance des matériaux. L'objectif est de rendre les notions plus claires et d'aider les étudiants à progresser efficacement dans leur apprentissage.

Ce polycopié est divisé en six chapitres. Le contenu du premier chapitre concerne une introduction générale à la résistance des matériaux. Le deuxième chapitre traite le calcul des caractéristiques géométriques des sections droites. Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement en compression et traction simple des poutres. Le quatrième chapitre s'intéresse à l'étude de la flexion simple des poutres, le chapitre à pour objectif d'élaborer des méthodes permettant de déterminer les efforts internes qui surviennent dans une poutre soumise à la flexion: l'effort tranchant V et le moment fléchissant M agissant sur la section transversale (perpendiculaire) de la poutre. Dans ce chapitre, des relations permettant de calculer, en chaque point, les contraintes dues à ces efforts internes sont données. La méthode double intégration est également présentée pour la détermination de la flèche et de la rotation des sections droites. Dans le cinquième chapitre, on aborde le dimensionnement des barres soumises au cisaillement pure. Enfin, le sixième chapitre, traite le dimensionnement des sections droites isostatiques sollicitées en torsion pure.

Ce travail modeste constitue un moyen de comprendre la résistance des matériaux de manière méthodique et pédagogique.

Semestre: 4

Unité d'enseignement: UEF 2.2.3

Matière : Résistance des matériaux

VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)

Crédits: 4

Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Apprendre les notions de base de la résistance des matériaux, les buts et les hypothèses de la RDM, la notion des efforts internes, caractéristiques géométriques des sections, la loi de comportement des matériaux, notion de contraintes admissibles et le dimensionnement des pièces sous sollicitations simples.

Connaissances préalables recommandées :

Mécanique rationnelle et analyse des fonctions.

Contenu de la matière :

Chapitre 1. Introduction et généralités (2 semaines)

Buts et hypothèses de la résistance des matériaux, Différents types de chargements, Liaisons (appuis, encastremets, rotules), Principe Général d'équilibre -Équations d'équilibres, Méthode des sections - Notion des efforts internes : Effort normal N, Effort tranchant T, Moment fléchissant M, Définitions, conventions de signes et unités.

Chapitre 2. Caractéristiques géométriques des sections droites (2 semaines)

Centre de gravité, Moments statiques, Moments d'inertie d'une section droite, Transformation des moments d'inertie. Axes principaux centraux, moments d'inertie principaux.

Chapitre 3. Traction simple et compression simple (3 semaines)

Définitions, Efforts normaux de traction et de compression, Contrainte normale, Déformation élastique, Loi de Hooke, Module de Young, Diagramme contrainte-déformation, Condition de résistance et notion de contrainte admissible.

Chapitre 4. Flexion simple (4 semaines)

Définitions et hypothèses, Effort tranchants, Moments fléchissant, Relation différentielle entre la charge, Effort tranchant et Moment fléchissant. Diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant, Contraintes en flexion simple, Notion de l'axe neutre et dimensionnement. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche), Calcul de la contrainte tangentielle.

Chapitre 5. Cisaillement (2 semaines)

Définitions, Cisaillement simple, Cisaillement pur, Contrainte de cisaillement, Déformation élastique en cisaillement, Condition de résistance au cisaillement.

Chapitre 6. Torsion (2 semaines)

Définitions, Contrainte tangentielle ou de glissement, Déformation élastique en torsion, Condition de résistance à la torsion.

Mode d'évaluation:

Contrôle Continu : 40%; Examen: 60%.

Références bibliographiques :

1. F. Beer, Mécanique à l'usage des ingénieurs – statique, McGraw-Hill, 1981.
2. G. Pissarenko et all, Aide-mémoire de résistance des matériaux.
3. I. Miroslioubov et coll, "Problèmes de résistance des matériaux", Editions de Moscou.
4. L. Aleinik & J. Durler, "Résistance des matériaux", Ed. Spes, Dunod.
5. M. Kerguignas & G. Caignaert, "Résistance des matériaux", Ed. Dunod Université.
6. P. Stepine, Résistance des matériaux, Editions MIR ; Moscou, 1986.
7. S. Timoshenko, Résistance des matériaux, Dunod, 1986.
8. William et Nash, Résistance des matériaux, cours et problème, série Schaum, 1983.

Table des matières

PREFACE

Canevas de formation
Liste des Figures
Liste des Tableaux
Notations

Chapitre 1. Introduction et généralités

1 Introduction	1
1.1 Objectifs et Fondements de la Résistance des Matériaux	1
1.1.1 Définition et Objectif de la Résistance des Matériaux	1
1.1.2 Hypothèses de la Résistance des Matériaux	2
1.2 Différents Types de Chargements	2
1.2.1 Charges Concentrées	2
1.2.2 Charges Réparties	3
1.3 Liaisons	5
1.3.1 Différents Types d'Appuis	5
1.3.1.1 Appui Simple ou Libre	5
1.3.1.2 Appui Double ou à Rotule	6
1.3.1.3 Appui Triple ou Encastrement	6
1.4 Principe Général d'Équilibre	7
1.4.1- Remarque	9
1.4.2- Moment d'une force par rapport à un point :	9
1.5 Calcul des Efforts Internes - La Méthode des Sections	9
1.5.1 Les Efforts Internes dans une Poutre	9
1.5.2 Méthode des Sections	10
1.5.3 Diagrammes des Efforts et des Moments (M,N,T)	11
1.5.4 Conventions de Signes	12
1.6 Application pour le cas d'une charge concentrée	12
1.6.1 Remarques importantes :	15

Chapitre 2. Caractéristiques géométriques d'une section droite

2. Introduction	17
2.1 Calcul des Contraintes et des Déformations sur les Sections Planes	17
2.2 Le Centre de gravité	17
2.3 Exemple d'application 1	19
2.3.1 Solution	20
2.4 Moment statique	20
2.4.1 Moment Statique d'une Surface Plane	21
2.5 Moments quadratiques	21
2.5.1 Moment quadratique par rapport à un axe	21
2.5.2 Exemple d'application 2	23
2.5.3 Moment quadratique par rapport à un point	25
2.5.4 Moment d'inertie par rapport à un couple d'axe	26
2.6 Translation d'axes : Théorème de Huygens	28
2.7 Moments quadratiques d'axes concourants	29
2.7.1 Rotations d'axes	29
2.7.2 Recherche des directions principales	30
2.7.3 Représentation graphique – Cercle de Mohr	31
2.7.4 Exercice d'application 3	32

Chapitre 3 . Traction simple et Compression simple

3. Introduction	33
3.1 Définitions	33
3.1.1 Traction simple.....	33
3.1.2 Compression simple	33
3.2 Effort normal	34
3.2.1 Calcul de l'effort normal	34
3.3 Contrainte normale	35
3.3.1 Essai de traction	35
3.3.2 Objectif de l'essai.....	36
3.3.3 Diagramme contrainte-déformation	36
3.4 Contrainte admissible et Condition de résistance	38

3.4.1	Contrainte admissible	38
3.4.2	Condition de résistance	39
3.5	Applications	39
3.5.1	Exercice 1: Analyse d'une barre en acier ABC soumise à des charges axiales.....	39
3.5.2	Exercice 2 : Analyse d'une Barre en Acier Soumise à un Effort de Traction	41

Chapitre 4 . Flexion simple

4	Introduction	43
4.1	Définitions et hypothèses	43
4.1.1	Définition	43
4.1.2	Hypothèses	44
4.2	Efforts intérieurs (Effort tranchant, Moment fléchissant)	44
4.3	Relation différentielle entre la charge, l'effort tranchant et le moment fléchissant	45
4.3.1	Relation entre l'effort tranchant, le moment fléchissant et le chargement réparti	45
4.3.2	Relation entre moments fléchissant et efforts tranchants	46
4.4	Diagrammes des efforts tranchants $T(x)$ et des moments de flexion	47
4.5	Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)	47
4.5.1	Définition de la courbe de déformation	47
4.5.2	Importance de la courbe de déformation	47
4.5.3	Méthodes d'analyse	48
4.5.4	Calcul de la flèche de la poutre : Méthode d'intégration	48
4.6	Dimensionnement : Calcul des contraintes	49
4.6.1	Contrainte normale en flexion simple	49
4.6.2	La contraint tangentielle	52
4.7	Condition de résistance	53
4.8	Exercice d'application	54

Chapitre 5 . Cisaillement

5.1 Introduction	61
5.2 Définitions	61
5.2.1 Exemple de cisaillement	62
5.3 Contrainte de cisaillement	63
5.4 Déformation élastique en cisaillement	64
5.5 Condition de résistance au cisaillement	65
5.6 Exercices	66
5.6.1 Exercice 1.....	66
5.6.2 Exercice 2.....	67

Chapitre 6 . Torsion

6.Introduction	69
6.1 Définitions	69
6.2 Contrainte tangentielle ou de glissement	70
6.2.1 L'angle unitaire de torsion	70
6.3 Contrainte tangentielle	71
6.3.1 Répartition des contraintes	72
6.3.2 Déformation élastique en torsion	73
6.4 Condition de résistance à la torsion	73
6.5 Négligence des contraintes normales	74
6.6 Exercices	74
6.6.1 Exercice1 : Analyse de la Torsion dans un Arbre en Acier	74

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques.....	77
----------------------------------	----

ANNEXES

Formulaires poutres	80
---------------------------	----

Liste des Figures

Chapitre 1. Introduction et généralités

Figure 1.1: La charge concentrée	3
Figure 2.1: La charge concentrée schématiquement	3
Figure 3.1 : Poids du revêtement sur une dalle	3
Figure 4.1: Mur sur une poutre	4
Figure 5.1 La charge répartie schématiquement	4
Figure 6.1: Appui simple	6
Figure 7.1 : Appui double	6
Figure 8.1: Appui encasté	7
Figure 9.1: Le Principe de Méthode des sections	11
Figure 10.1 : Les signes des efforts internes (M, N, T)	12

Chapitre 2. Caractéristiques géométriques d'une section droite

Figure 1.2 Centre de gravité	17
Figure 2.2 : Le moment statique	21
Figure 3.2 : Le moment statique de section rectangulaire	21
Figure 4.2 : Moment quadratique par rapport à un axe	22
Figure 5.2: Moment quadratique d'une section.	23
Figure 6.2 : Moment quadratique par rapport à un point	26
Figure 7.2 : Théorème de Huygens	26
Figure 8.2 : Moment d'inertie par rapport à un couple d'axe	27
Figure 9.2 : Translation d'axes	28
Figure 10.2 : Rotations d'axes	30
Figure 11.2 : Cercle de Mohr.	31

Chapitre 3 . Traction simple et Compression simple

Figure 1.3 : Traction et compression	33
Figure 2.3: Machine d'essais et éprouvette	35
Figure 3.3 : Diagramme contrainte et déformation	36

Chapitre 4 . Flexion simple

Figure 1.4 : Courbure d'une poutre soumise à la flexion.	43
Figure 2.4 : Composantes du torseur de cohésion	44
Figure 3.4 : Les efforts internes dans la poutre	45
Figure 4.4 : Élément de poutre isolé chargé par force répartie	45
Figure 5.4 : Élément de poutre isolé chargé par une force concentrée.	46
Figure 6.4 : Élément de poutre isolé sans charge.	46
Figure 7.4 : Poutre déformée.	48
Figure 8.4 : Condition aux limites	49
Figure 9.4 : Contrainte normale de flexion simple	49
Figure 10.4 : Section rectangulaire	50
Figure 11.4 : Section en T.....	50
Figure 12.4 : Répartition des contraintes tangentiels	52

Chapitre 5 . Cisaillement

Figure 1.5 : Découpage d'un tube carré sous un effort de cisaillement	61
Figure 2.5 : Explication du phénomène de cisaillement	62
Figure 3.5.1 Cisaillement pure	62
Figure 4.5.2 Rivetage	62
Figure 5.5.3 poinçonnage	63
Figure 6.5 : Contraintes de cisaillement	63
Figure 7.5 Déformation élastique en cisaillement	64
Figure 8. 5 : Courbe contrainte –déformation	64

Chapitre 6 . Torsion

Figure 1.6 : Poutre est sollicitée à la torsion simple	69
Figure 2.6: Tige de tournevis	70
Figure 3.6 : Angle de torsion	71
Figure 4.6 Répartition des contraintes	72

Liste des Tableaux

Chapitre 1. Introduction et généralités

Tableau 1.1: Résumé des charges les plus utilisées et leur équivalence	4
Tableau 2.1: Les trois systèmes en RDM :	8

Chapitre 2. Caractéristiques géométriques d'une section droite

Tableau 3.2: Position du centre de gravité des sections simples	18
Tableau 4.2: Exemples de moment quadratique pour une section plane: ..	24

Chapitre 3 . Traction simple et Compression simple

Tableau 5.3 : Module de Young en daN/mm ² de certains matériaux	37
--	----

Chapitre 4 . Flexion simple

Tableau 6.4 : Récapitulatif des résultats	60
---	----

Chapitre 5 . Cisaillement

Tableau 7.5 : Contrainte tangentielle maximale de certaines sections	66
--	----

Chapitre 6 . Torsion

Tableau 8.6 : Moment quadratique polaire de certaines sections	73
--	----

Notations

I_x : moment d'inertie par rapport à x ;

I_y : moment d'inertie par rapport à y ;

I_p : moment d'inertie polaire ;

I_{xy} : produit d'inertie ;

l : longueur de la barre ;

M_A : moment d'encastrement au point A ;

M_f : moment fléchissant ;

M_{fmax} : moment fléchissant maximum

N : effort normal ;

q : charge surfacique uniformément répartie;

P : force concentrée extérieure appliquée ;

T : effort tranchant ;

R_{Ay} : réaction horizontale au point A ;

R_{By} : réaction horizontale au point B;

R_{Ax} : réaction verticale au point A ;

R_{Bx} : réaction verticale au point B;

S_x : moment statique par rapport à l'axe x ;

S_y : moment statique par rapport à l'axe y ;

X_G : abscisse du centre de gravité ;

Y_G : ordonnée du centre de gravité ;

σ : contrainte normale ;

σ_{adm} : contrainte normale admissible ;

σ_{max^-} : contrainte de traction maximale

σ_{max^+} : contrainte de compression maximale;

τ : contrainte tangentielle ;

τ : contrainte tangentielle maximale;

M_y, M_z : Moments de flexion dans une section;

T_y, T_z : Efforts tranchants dans une section;

$[\sigma]$: Contrainte normale admissible;

$[\tau]$: Contrainte tangentielle admissible;

f : Flèche d'une poutre;

E : le module d'élasticité longitudinale (MPa);

Y'' : la dérivée seconde de la déformée y;

Chapitre 1 :

Introduction et généralité à la résistance des matériaux

Chapitre 1 Introduction et généralités

1 Introduction

1.1 Objectifs et Fondements de la Résistance des Matériaux

1.1.1 Définition et Objectif de la Résistance des Matériaux

La Résistance des Matériaux (RDM) est une branche de l'ingénierie qui se consacre à l'étude des propriétés mécaniques des solides, notamment leur résistance et leur déformation sous diverses charges. Cette discipline vise principalement à :



La Résistance des Matériaux vise à optimiser l'utilisation des matériaux dans une structure tout en répondant aux exigences essentielles suivantes :

1. **Résistance** : La pièce doit être capable de supporter et de transmettre les charges externes auxquelles elle est soumise. Cela reflète la capacité d'un matériau à résister aux forces appliquées sans rupture.
2. **Rigidité** : La pièce ne doit pas présenter de déformation excessive lorsqu'elle est soumise à des sollicitations. La rigidité désigne la propriété d'un matériau à résister aux déformations sous charge.
3. **Stabilité** : La pièce doit maintenir son intégrité géométrique afin de prévenir les conditions d'instabilité, telles que le flambement. La stabilité assure que la structure ne se déforme pas de manière excessive sous des charges spécifiques.
4. **Endurance** : Lorsqu'une pièce est soumise à des charges répétées, elle doit pouvoir supporter un certain nombre de cycles de sollicitation sans se rompre. L'endurance fait référence à la capacité d'un matériau à résister à la fatigue due aux chargements cycliques.
5. **Résilience** : En cas de chargement dynamique, comme un impact, la pièce doit être capable d'absorber une certaine quantité d'énergie sans subir de dommages majeurs.

La résilience mesure la capacité d'un matériau à absorber et dissiper l'énergie sans se détériorer de manière significative.

La Résistance des Matériaux est un outil crucial pour les ingénieurs en structure, permettant de concevoir des ouvrages économiquement viables tout en minimisant les déformations sous contrainte appliquée.

1.1.2 Hypothèses de la Résistance des Matériaux

Pour faciliter les calculs et élaborer des modèles permettant le dimensionnement des structures, les hypothèses suivantes sont posées en Résistance des Matériaux :

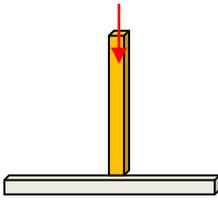
1. **Homogénéité, Isotropie et Continuité du Matériau** : Il est supposé que le matériau possède des propriétés élastiques uniformes dans toutes les directions et à tous les points du corps. De plus, le matériau est considéré comme un milieu continu, sans discontinuités.
2. **Hypothèses sur les Déformations** : Les déformations provoquées par les charges sont supposées négligeables par rapport aux dimensions des éléments, ce qui implique que la configuration géométrique de la structure reste pratiquement inchangée.
3. **Hypothèse des Sections Planes (Hypothèse de Navier-Bernoulli)** : Les sections droites d'un élément restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne lors de la déformation. Cette hypothèse simplifie l'analyse en considérant que les déformations ne modifient pas la planéité des sections.
4. **Hypothèse de Saint-Venant** : Les efforts appliqués peuvent être modélisés par leur torseur résultant. Les contraintes et les déformations dans une section éloignée ne dépendent que des résultantes des forces extérieures, et non des effets locaux.

1.2 Différents Types de Chargements

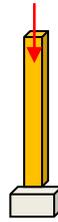
1.2.1 Charges Concentrées

Une charge est qualifiée de concentrée lorsqu'elle est appliquée sur une surface très petites par rapport aux dimensions de la structure, ce qui permet de la modéliser comme un point. Les charges concentrées sont mesurées en unités telles que Newtons (N), méganewtons (MN), ou décanewtons (daN). Par exemple :

Un poteau sur une poutre.



Un poteau reposant sur une semelle.



Une poutre reposant sur un poteau.

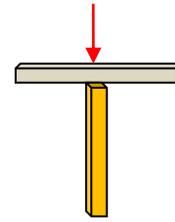


Figure 1.1: La charge concentrée

La charge concentrée appliquée sur une longueur est représentée de la manière suivante :



Figure 2.1: la charge concentrée schématiquement

1.2.2 Charges Réparties

Une charge est considérée comme répartie lorsqu'elle est distribuée sur une longueur ou une surface significative. Les charges réparties peuvent être classées en deux types principaux :

1. Charge Répartie Surfactive : Il s'agit d'une charge répartie uniformément sur une surface, mesurée en Newtons par mètre carré (N/m^2).

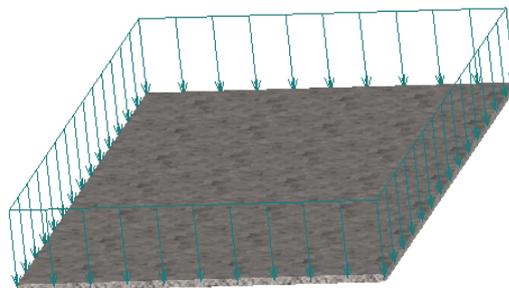


Figure 3.1 : Poids du revêtement sur une dalle

2. Charge Répartie Linéaire : Il s'agit d'une charge répartie uniformément sur une longueur, exprimée en Newtons par mètre (N/m).

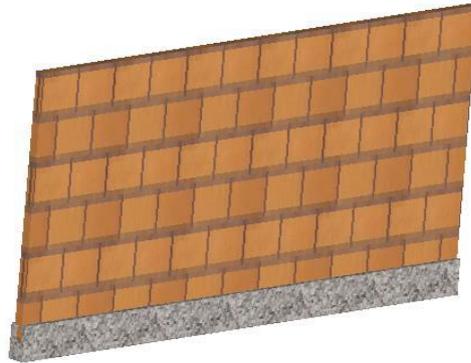


Figure 4.1: Mur sur une poutre

La charge répartie le long d'une longueur est représentée comme suit :

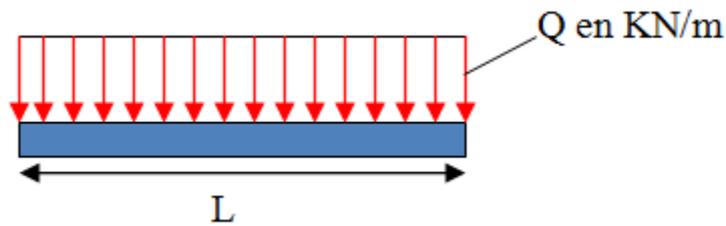
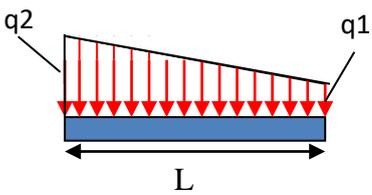
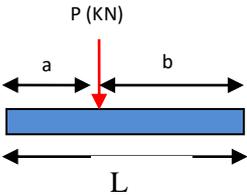


Figure 5.1 La charge répartie schématiquement

1.2.3 Convertir une charge répartie par charge concentrée

Tableau 1.1: Résumée des charges les plus utilisées et leur équivalence [26]

Type de charge	Charge répartie	Charge concentrée	La valeur de charge
Rectangle			$P = q \cdot L$
Triangulaire			$P = \frac{qL}{2}$

<p>Trapézoïdale</p>			$P = \frac{(q_1 + q_2)}{2} \times L$ $b = \frac{(q_1 + 2q_2) \times L}{3(q_1 + q_2)}$ $a = \frac{(q_2 + 2q_1) \times L}{3(q_1 + q_2)}$
----------------------------	---	--	--

1.3 Liaisons

Les liaisons (ou appuis) sont des dispositifs conçus pour limiter ou empêcher totalement certains déplacements, qu'ils soient de translation ou de rotation.

1.3.1 Différents Types d'Appuis

Dans la pratique de la construction, on distingue principalement trois types fondamentaux d'appuis :

1.3.1.1 Appui Simple ou Libre :

- Ce type d'appui est couramment utilisé dans les ouvrages importants tels que les ponts et les bâtiments.
- Il fournit une réaction normale à la surface d'appui, sans contrainte contre les efforts appliqués suivant l'axe longitudinal de la poutre.
- En conséquence, seule une inconnue doit être déterminée pour chaque appui, d'où le terme "appui simple".
- Un appui simple bloque la translation dans une direction (généralement verticale), ce qui se traduit par le développement d'une force verticale R_y au niveau de l'appui, appelée réaction d'appui.

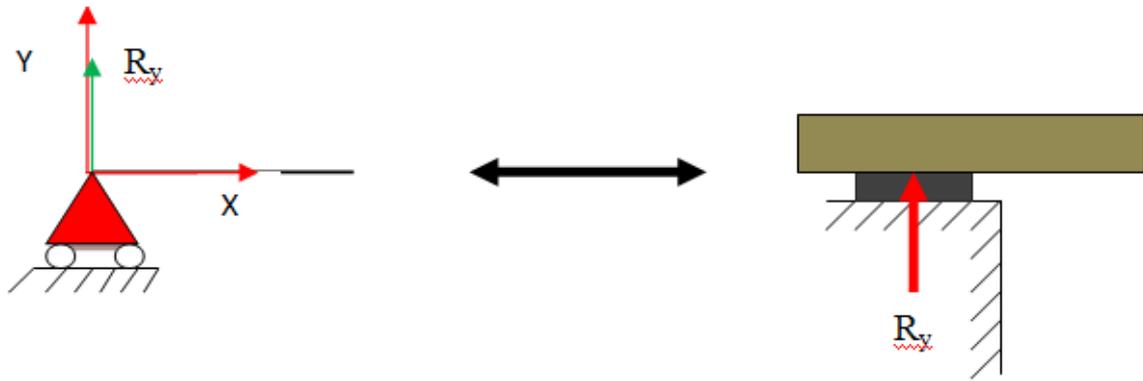


Figure 6.1: Appui simple

1.3.1.2 Appui Double ou à Rotule

- Une rotule est une articulation sphérique permettant une rotation libre dans toutes les directions entre deux pièces.
- Un appui double, également appelé appui à rotule, bloque les translations dans les deux directions. Il engendre le développement de deux forces verticales, R_x et R_y , au niveau de l'appui. Dans ce cas, il y a donc deux inconnues à déterminer, R_x et R_y , d'où le nom d'appui double. Ce type d'appui est représenté comme suit :

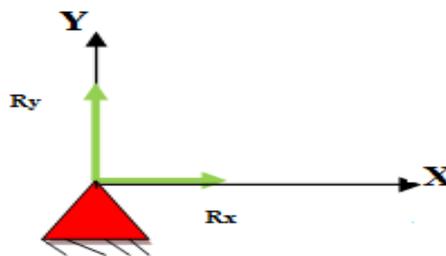


Figure 7.1 : Appui double

1.3.1.3 Appui Triple ou Encastrement

- Un appui triple, ou encastrement, génère une réaction composée de trois éléments : une réaction verticale (R_y), une réaction horizontale (R_x), et un moment d'encastrement (M_A).
- L'encastrement bloque tous les types de déplacements, qu'ils soient de translation ou de rotation.
- Par conséquent, il y a trois inconnues à déterminer pour chaque appui, d'où le nom d'appui triple. Ce type d'appui est représenté comme suit :

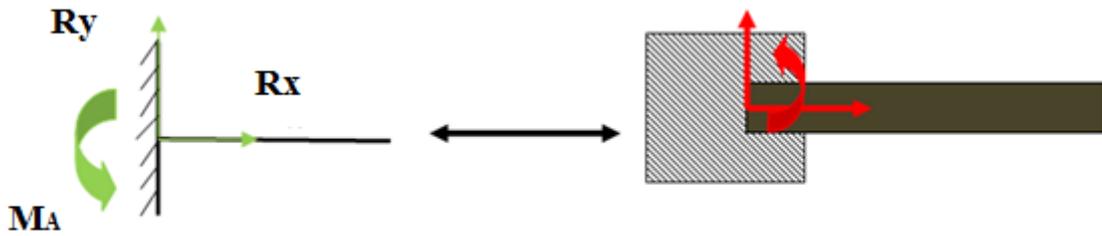


Figure 8.1: Appui encastéré

1.4 Principe Général d'Équilibre

L'équilibre d'un système est déterminé par le principe fondamental de la statique. Pour qu'un solide indéformable soit en équilibre, deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

- ✓ La résultante générale des forces (actions et réactions) appliquées à ce solide est nulle

$$F = 0$$

- ✓ Le moment résultant de toutes les forces appliquées à ce solide, calculé par rapport à un point quelconque est nul : $M = 0$

Donc il y'a 3 équations équilibre :

Équilibre de translation:

$$\sum \vec{F}_{/x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Translation horizontale}$$

$$\sum \vec{F}_{/y} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Translation verticale}$$

Équilibre de rotation:

$$\sum \vec{M}_{/z} = 0 \quad \text{Rotation par rapport à n'importe lequel axe perpendiculaire sur le plan des forces xy.}$$

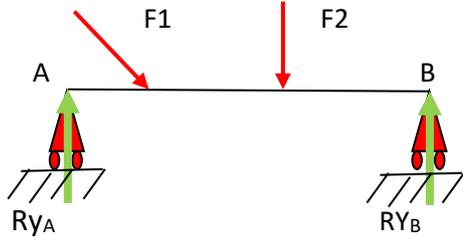
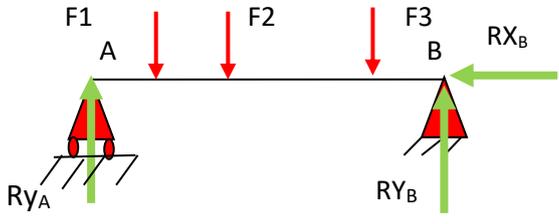
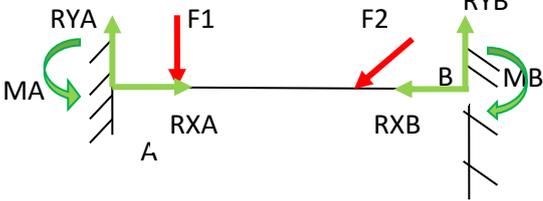
Nous disposons de trois équations ($n = 3$), et les inconnues du problème (r) sont les réactions d'appui.

Ces conditions doivent être satisfaites simultanément pour garantir l'état d'équilibre statique d'un système. En pratique, ces principes sont utilisés pour analyser et concevoir

des structures et des machines afin de s'assurer qu'elles resteront stables et fonctionnelles sous l'effet des charges appliquées.

Les concepts d'équilibre sont aussi étroitement liés aux lois de Newton, notamment la première loi de Newton (principe d'inertie) et la troisième loi de Newton (action-réaction). L'analyse d'équilibre est souvent la première étape dans l'étude des systèmes mécaniques, permettant de déterminer les forces et les moments internes et de concevoir des structures capables de résister aux charges appliquées sans défaillance.

Tableau 2.1: les trois systèmes en RDM :

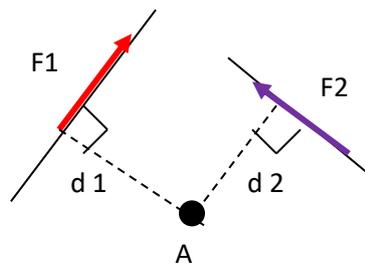
le système	Exemple
<p>Système hypostatique :</p> <p>Si le nombre d'inconnues d'appuis est inférieur au nombre d'équation d'équilibre statique, la construction risque de s'écrouler.</p>	 <p style="text-align: center;">$r = 2, n = 3 \longrightarrow r < n$</p>
<p>Système isostatique:</p> <p>Si le nombre d'inconnues est égal au nombre des équations d'équilibre statique la poutre est stable et calculable par les équations d'équilibre statique seules.</p>	 <p style="text-align: center;">$r = 3, n = 3 \longrightarrow r = n$</p>
<p>Système hyperstatique :</p> <p>Si le nombre d'inconnus d'appuis est supérieur au nombre d'équations d'équilibre statique la poutre serait stable.</p> <p>Mais les équations d'équilibre statique ne permettraient pas de déterminer les inconnus d'appuis.</p>	 <p style="text-align: center;">$r = 6, n = 3 \longrightarrow r > n$</p>

1.4.1- Remarque : dans ce polycopie nous nous intéressons au système isostatique

1.4.2- Moment d'une force par rapport à un point :

Le moment d'une force est une notion clé dans l'analyse des structures et des systèmes mécaniques, car il permet de déterminer l'effet des forces appliquées en termes de rotation et de stabilité. Il est particulièrement important dans le calcul des moments de flexion dans les poutres et les structures soumises à des charges.

Les moments peuvent être additionnés pour trouver le moment résultant lorsque plusieurs forces sont appliquées. Cette addition est effectuée en utilisant les règles de l'addition vectorielle. La compréhension et le calcul correct des moments sont essentiels pour assurer la conception sûre et efficace des structures et des machines.



$$M(F_1/A) = +F_1 \times d_1 \quad M(F_2/A) = -F_2 \times d_2$$

- Par convention, un moment est considéré **positif** si la force tend à tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Il est **négatif** dans le cas contraire
- Le moment est exprimé en N.m (KN.m ou MN.m...)

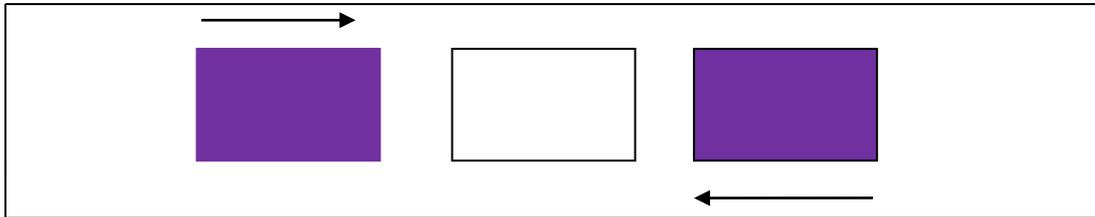
1.5 Calcul des Efforts Internes - La Méthode des Sections

1.5.1 Les Efforts Internes dans une Poutre

A) Effort Normal (N)

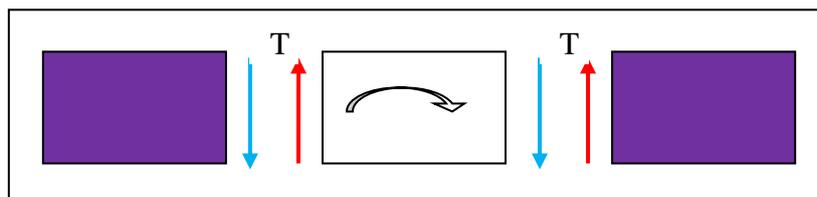
- L'effort normal (N) est la composante de la résultante des forces internes qui agit perpendiculairement à la section de l'élément, c'est-à-dire suivant l'axe longitudinal de la poutre.
- Cet effort provoque une déformation longitudinale de l'élément.

- L'effort normal est considéré comme positif lorsqu'il s'agit d'une traction et négatif en cas de compression.



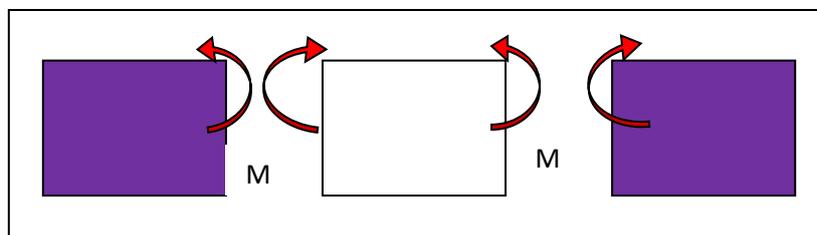
B) Efforts Tranchants (T)

- Les efforts tranchants (T) représentent les forces internes qui agissent parallèlement à la section transversale de l'élément. Ces forces transversales (T_z et T_y) sont la somme des projections de toutes les forces internes appliquées dans la section sur les axes principaux de cette dernière.



C) Moments Fléchissant (M_f)

- Les moments fléchissant (M_f) sont les moments résultants des forces internes par rapport aux axes d'inertie principaux de la section. Les composantes M_y et M_z représentent respectivement la somme des moments de toutes les forces internes appliquées dans la section par rapport aux axes Y et Z.



1.5.2 Méthode des Sections

Pour déterminer les forces internes dans un élément soumis à des sollicitations, la méthode des sections est utilisée en résistance des matériaux. Cette méthode repose sur le principe suivant, si un élément est en équilibre sous l'action de forces extérieures,

alors toute partie de cet élément, découpée et soumise aux forces qui lui sont appliquées, est également en équilibre grâce à un système de forces internes dans la section.

Considérons un élément AB soumis à un système de forces extérieures. Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on découpe l'élément AB en deux parties à l'endroit souhaité.

Les valeurs des efforts normaux (N), des efforts tranchants (T), et des moments fléchissant (M) dans la section sont déterminées en calculant les sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur l'une des parties de l'élément sectionné (généralement celle où les calculs sont plus simples).

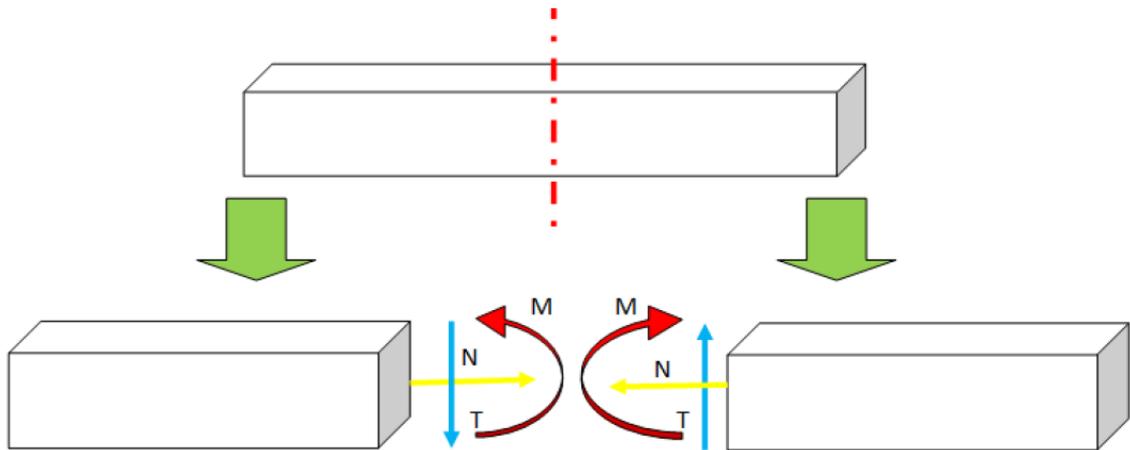


Figure 9.1: Le Principe de Méthode des sections

1.5.3 Diagrammes des Efforts et des Moments (M,N,T)

Les efforts et moments agissant dans différentes sections d'une poutre varient le long de celle-ci. Les valeurs maximales et minimales de ces efforts et moments sont cruciales pour la sécurité de la poutre. Pour visualiser ces variations, il est important de tracer des courbes représentant l'évolution des efforts et des moments d'une section à une autre. Ces courbes sont appelées diagrammes des efforts et des moments.

Dans cette section, nous nous concentrerons sur les diagrammes des efforts et des moments pour les poutres en deux dimensions (plan XOY). Cela limite les efforts et moments à trois éléments principaux : un effort normal (N), un effort tranchant (T_y), et un moment fléchissant (M_z).

1.5.4 Conventions de Signes

Les sollicitations (moment M , effort normal N , effort tranchant T) sont considérées comme positives selon les conventions illustrées dans la figure ci-dessous.

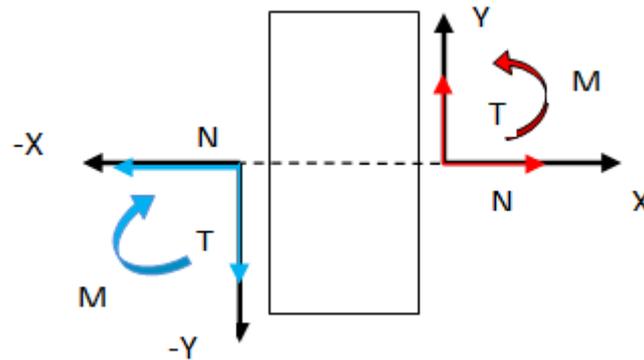
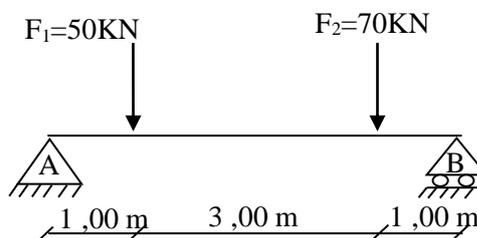


Figure 10.1 : Les signes des efforts internes (M , N , T)

1.6 Application pour le cas d'une charge concentrée

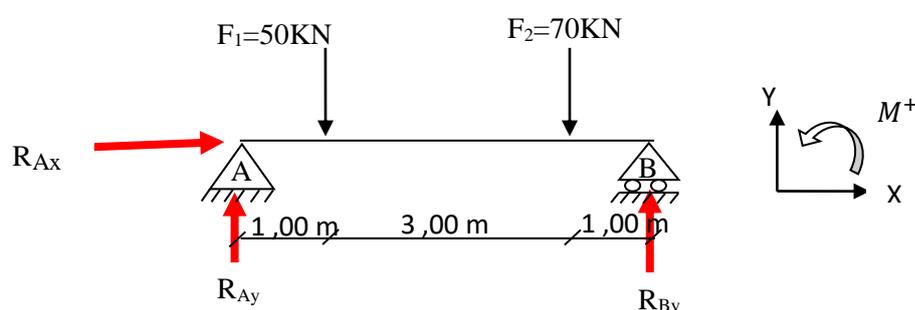
Soit poutre isostatique chargée par une deux force concentrée F_1 et F_2 . On demande de :



1. Calculer les réactions aux appuis A et B.
2. Tracer les diagrammes des efforts tranchants T et des moments fléchissant M .

La solution :

1. Calcul des réactions des appuis :



$$\sum F_{/x} = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_{/y} = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{Ay} + R_{By} = F_1 + F_2 = 50 + 70$$

$R_{Ay} + R_{By} = 120 \text{ KN}$

$$\sum M_{/A} = 0$$

Force (KN)	R_{Ax}	R_{Ay}	R_{By}	F_1	F_2
Moments (KN.m)	0	0	$+R_{By} \times 5$	$-F_1 \times 1$	$-F_2 \times 4$

$$-50 \times 1 - 70 \times 4 + R_{By} \times 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{By} \times 5 = 50 + 280$$

$R_{By} = 66 \text{ KN}$

$$\sum M_{/B} = 0$$

Force (KN)	R_{By}	F_2	F_1	R_{Ax}	R_{Ay}
Moments (KN.m)	0	$+F_2 \times 1$	$+F_1 \times 4$	0	$+5 R_{Ay}$

$$50 \times 4 + 70 \times 1 - R_{Ay} \times 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad R_{Ay} \times 5 = 200 + 70 = 0$$

$R_{Ay} = 54 \text{ KN}$

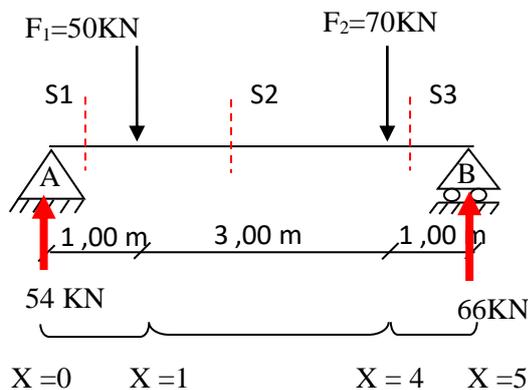
Vérification : $R_{Ay} +$

$$R_{By} = 54 + 66 = 120 \text{ KN} \quad \checkmark$$

2. Calcul des efforts internes dans la poutre.

Dans cette poutre, trois coupes à prévoir : La première coupe avant la force F_1 , la deuxième après F_1 et la troisième après F_2 .

En général, on détermine les bornes d'un intervalle dans les points d'application des forces concentrées et le début ou la fin d'une charge répartie.



Nous avons donc trois intervalles :

$$0 \leq x \leq 1$$

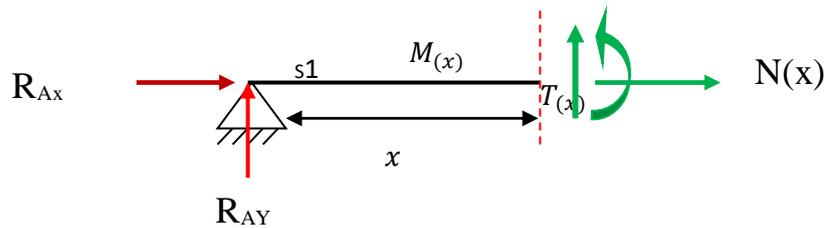
$$1 \leq x \leq 4$$

$$4 \leq x \leq 5$$

Section 1-1 $0 \leq x \leq 1$

On coupe avant la force F_1 , et on obtient le schéma suivant :

$$N(x) + R_{Ax} = 0 \text{ Kn} \implies N(x) = 0 \text{ Kn.}$$



$$N(x) + R_{Ax} = 0 \rightarrow N(x) = 0 \text{ KN}$$

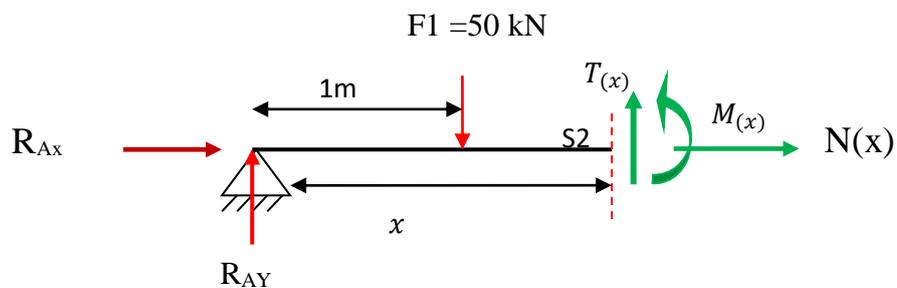
$$T(x) + R_{Ay} = 0 \longrightarrow T(x) = -54 \text{ KN}$$

$$M_f(x) - R_{Ay} x = 0 \longrightarrow M_f(x) = 54 x$$

X (m)	0	1
N(x) (KN)	0	0
T(x) (KN)	-54	-54
M _f (x) (KN.m)	0	54

Section 2-2 $1 \leq X \leq 4$

On coupe après la force F_1 , et on obtient le schéma suivant :



$$N(x) + R_{Ax} = 0 \rightarrow N(x) = 0 \text{ KN}$$

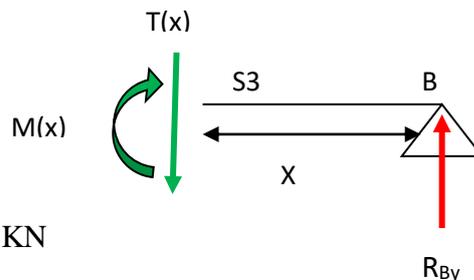
$$T(x) + 54 - 50 = 0 \rightarrow T(x) = -4 \text{ KN}$$

$$M_f(x) - 54x + 50(x-1) = 0 \rightarrow M_f(x) = 4x + 50$$

X (m)	1	4
N(x) (KN)	0	0
T(x) (KN)	-4	-4
M _f (x) (KN.m)	54	66

Section 3-3

$$1 \leq X \leq 0$$



$$N(x) + R_{Ax} = 0 \rightarrow N(x) = 0 \text{ KN}$$

$$T(x) - 66 = 0 \rightarrow T(x) = +66 \text{ KN}$$

$$M_f(x) - 66x = 0 \rightarrow M_f(x) = 66x$$

X (m)	1	0
N(x) (KN)	0	0
T(x) (KN)	+66	+66
M _f (x) (KN.m)	66	0

1.6.1 Remarques importantes :

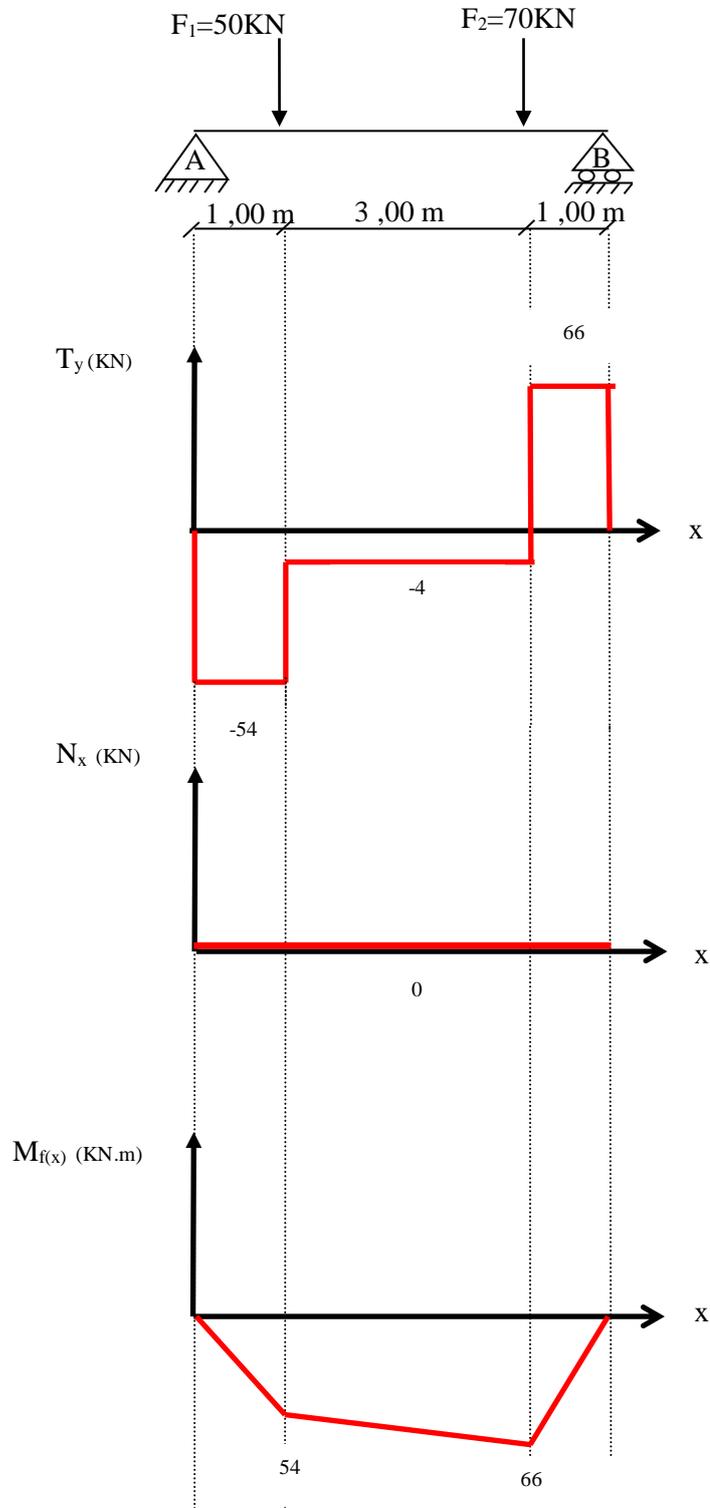
- L'effort tranchant n'est pas toujours une fonction continue. En effet, à l'endroit où une charge concentrée est appliquée, l'effort tranchant peut présenter des sauts discontinus entre les intervalles adjacents.
- La fonction du moment fléchissant M(x) est continue. Les valeurs du moment fléchissant à un point commun entre deux intervalles différents sont identiques.
- Le moment fléchissant est nul aux extrémités de la poutre. Ainsi :

$$M(0) = \text{et } M(L=5\text{m}) = 0$$

- ✓ La dérivée de la fonction M(x) n'est que la fonction T(x) :

$$T(x) = \frac{d(M(x))}{dx}$$

3-Diagrammes des efforts internes :



- L'effort tranchant n'est pas toujours une fonction continue. En effet, lorsqu'une charge concentrée est appliquée à un point précis, l'effort tranchant peut subir des sauts discontinus entre les intervalles adjacents. Cela traduit une variation brusque dans la distribution de l'effort, notamment à l'endroit de l'application de la charge.
- La fonction du moment fléchissant $M(x)$ est continue. Les valeurs du moment fléchissant à un point de jonction entre deux intervalles différents sont identiques, ce qui assure la continuité de la déformation dans la poutre.
- Le moment fléchissant est nul aux extrémités de la poutre, ce qui signifie que $M(0)=0$ et $M(L=5m)=0$. Cette propriété est valable pour une poutre simplement appuyée ou encastree aux deux extrémités.
- La dérivée de la fonction $M(x)$ est égale à la fonction de l'effort tranchant $T(x)$. Cela établit une relation directe entre la courbure de la poutre (ou le moment fléchissant) et la variation de l'effort tranchant tout au long de la poutre.

Chapitre 2 :

Caractéristiques géométriques des sections droites

Chapitre 2 Caractéristiques géométriques d'une section droite

2. Introduction

2.1 Calcul des Contraintes et des Déformations sur les Sections Planes

Pour déterminer les contraintes agissant sur les sections planes des éléments d'une structure et évaluer les déformations, il est essentiel de connaître les différentes caractéristiques géométriques de ces sections.



2.2 Le Centre de gravité

Le centre de gravité d'une section est le point où l'on peut supposer que toute la masse de cette section est concentrée pour les calculs de résistance et de stabilité. En termes mathématiques, c'est le point d'équilibre de la section, comme si elle était suspendue librement et soumise à la gravité. Dans le domaine des matériaux, le centre de gravité est essentiel pour déterminer l'effet d'une force appliquée sur la stabilité et la résistance de la structure. Soit une section plane d'aire S définie dans un repère orthonormée OXY

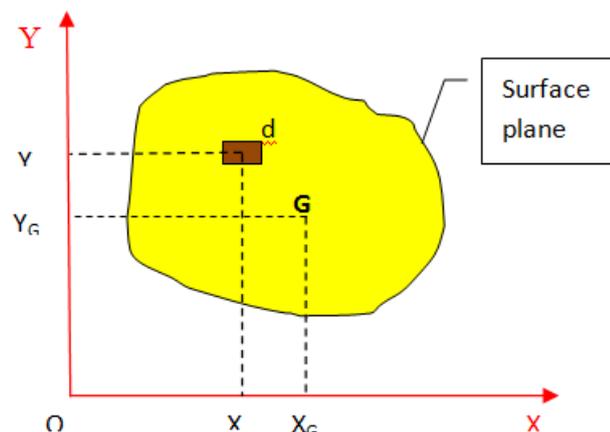


Figure 1.2 Centre de gravité [10]

Les coordonnées du centre de gravité G sont définies par :

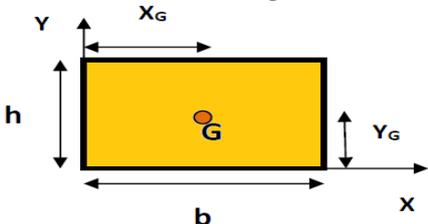
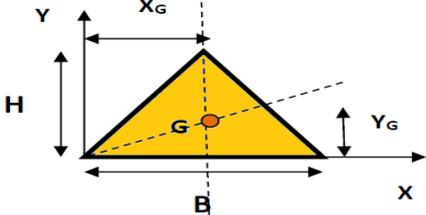
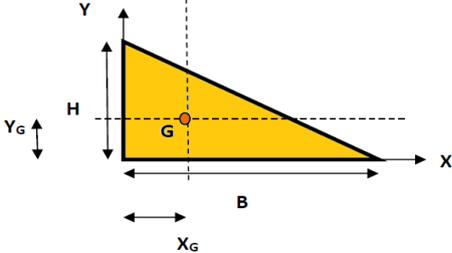
$$X_G = \frac{\iint_S X dS}{S} \quad ; \quad Y_G = \frac{\iint_S Y dS}{S} \quad (2.1)$$

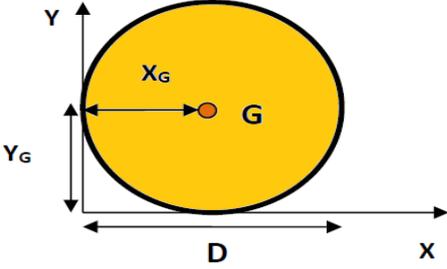
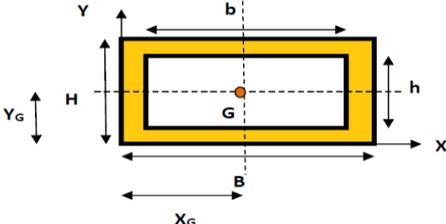
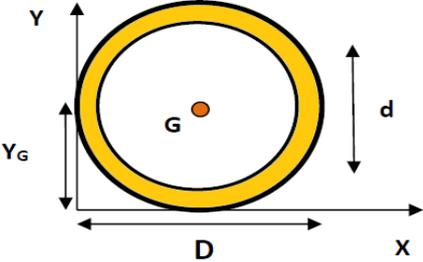
- Si la section S peut être décomposée en sous section simples n, d'aire connus S_i et de centre de gravités connus (X_{Gi} et Y_{Gi}) donc :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad ; \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \quad (2.2)$$

- Si la section S est symétrique, le centre de gravité G se trouve sur l'axe de symétrie.

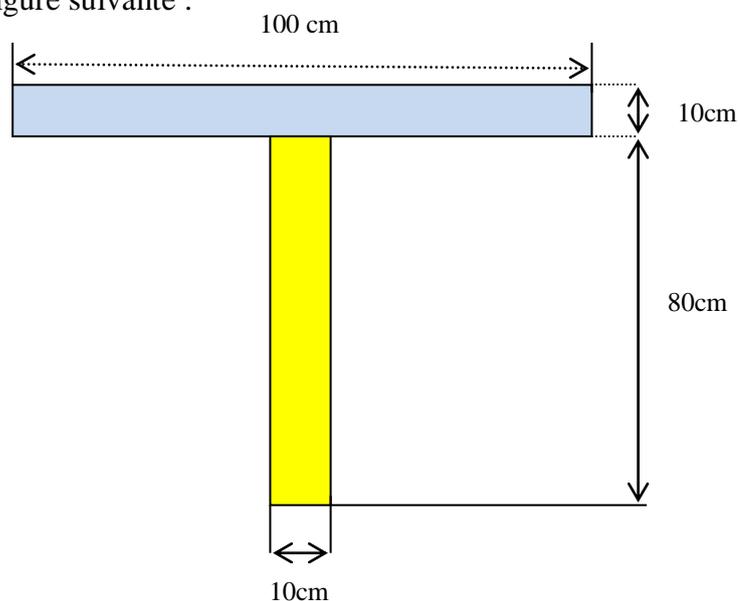
Tableau 3.2: Résumé de la position de centre de gravité des sections simples [7]

La Section	Le centre de gravité
<p style="text-align: center;">Section rectangulaire</p> 	$X_G = \frac{b}{2}$ $Y_G = \frac{h}{2}$ <p>Surface : $S = b \times h$</p>
<p style="text-align: center;">Section triangulaire</p> 	$X_G = \frac{B}{2}$ $Y_G = \frac{H}{3}$ <p>Surface : $S = (B \times H) / 2$</p>
<p style="text-align: center;">Section triangulaire</p> 	$X_G = \frac{B}{3}$ $Y_G = \frac{H}{3}$ <p>Surface : $S = (B \times H) / 2$</p>

<p style="text-align: center;">Section circulaire</p> 	$X_G = \frac{D}{2}$ $Y_G = \frac{D}{2}$ <p style="text-align: center;">Surface : $S = \pi D^2 / 4$</p>
<p style="text-align: center;">Section rectangulaire creuse</p> 	$X_G = \frac{B}{2}$ $Y_G = \frac{H}{2}$ <p style="text-align: center;">Surface : $S = (B \times H) - (b \times h)$</p>
<p style="text-align: center;">Section circulaire creuse</p> 	$X_G = \frac{D}{2}$ $Y_G = \frac{D}{2}$ <p style="text-align: center;">Surface : $S = \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right)$</p>

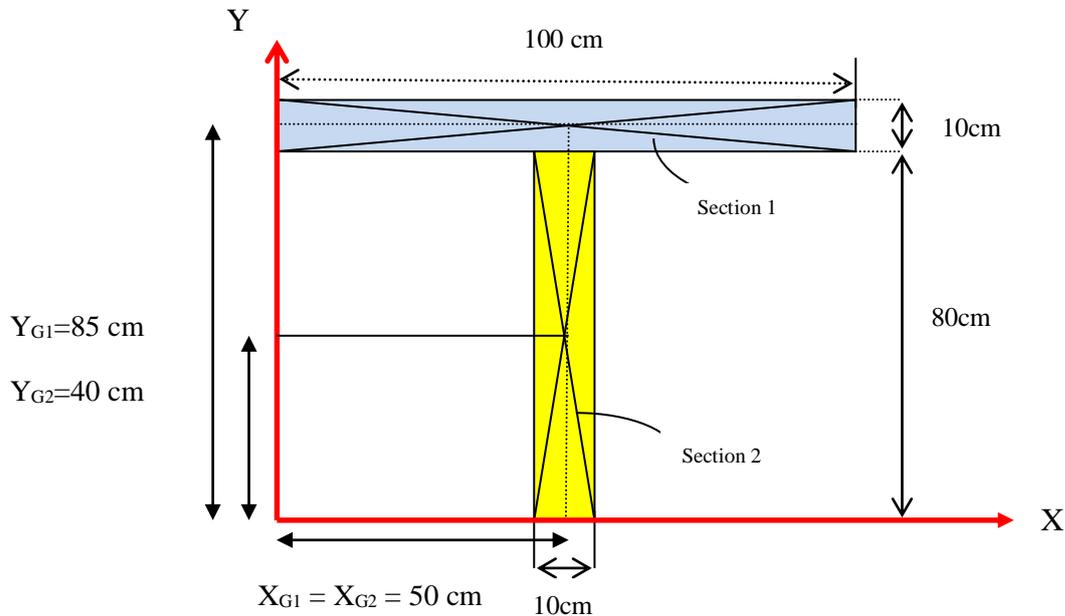
2.3 Exemple d'application 1 :

Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la section composée en forme de T, représentée sur la figure suivante :



2.3.1 Solution :

Pour déterminer les coordonnées de centre de gravité des sections, on projette sur les axes X et Y et on calcule la distance entre chaque projection et le point repère O.



Pour cette étape, un tableau récapitulatif est nécessaire pour le calcul du centre de gravité.

	$S_i (cm^2)$	$X_{Gi} (cm)$	$Y_{Gi} (cm)$	$S_i X_{Gi} (cm^3)$	$S_i Y_{Gi} (cm^3)$
Section 1	$10 * 100 = 1000$	50	85	50000	85000
Section 2	$80 * 10 = 800$	50	40	40000	32000
Somme	$1000 + 800 = 1800$			90000	117000

Alors :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \frac{90000}{1800} = 50 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \frac{117000}{1800} = 65 \text{ cm}$$

$$(X_G, Y_G) = (50, 65) \text{ cm}$$

2.4 Moment statique

Le moment statique S d'une section par rapport à un axe ox ou oy (Figure. 2.3) est donné par l'une des expressions suivantes:

$$S_x = \iint_s Y dS \qquad S_y = \iint_s X dS \qquad (2.3)$$

2.4.1 Moment Statique d'une Surface Plane

Le moment statique d'une surface plane, également appelé moment de premier ordre, est une grandeur mathématique utilisée en mécanique des matériaux pour décrire la distribution de la surface par rapport à un axe donné. Le moment statique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan est égal au produit de la surface par la coordonnée Y_G du centre de cette surface. Les moments statiques sont utilisés pour calculer le centre de gravité d'une section, ainsi que pour déterminer les contraintes et les déformations dans les structures.

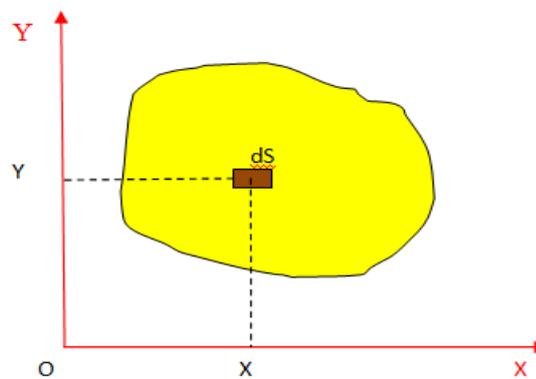


Figure 2.2 : Le moment statique [10]

Exemple : le moment statique de section rectangulaire

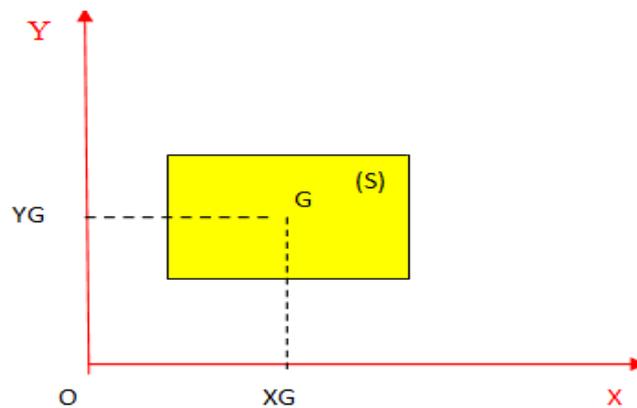


Figure 3.2 : le moment statique de section rectangulaire [10]

$$S_x = Y_G S \quad S_y = X_G S \quad (2.4)$$

Remarque:

1. le moment statique a pour dimension la troisième puissance d'une longueur, il s'exprime en m^3 , cm^3 ou mm^3 .

2. Le moment statique d'une surface plane par rapport à un axe de son plan passant par le centre de cette surface est nul donc : $S_x=0$; $S_y=0$
3. Le moment statique d'une surface composées S_1, S_2, \dots, S_n est égal :

$$S_y = \sum_{i=1}^n X_{Gi} S_i \quad ; \quad S_x = \sum_{i=1}^n Y_{Gi} S_i \quad (2.5)$$

2.5 Moments quadratiques

2.5.1 Moment quadratique par rapport à un axe :

Le moment quadratique d'une surface plane par rapport à un axe, également appelé moment d'inertie de surface ou moment de deuxième ordre, est une grandeur mathématique utilisée pour décrire la résistance d'une section à la flexion. Dans un repère orthonormé OXY, on définit une surface (S) et un axe (Δ). Le moment quadratique élémentaire par rapport à l'axe (Δ) est défini par la formule :

$$\iint_S I_\Delta = \delta^2 ds \quad (2.6)$$

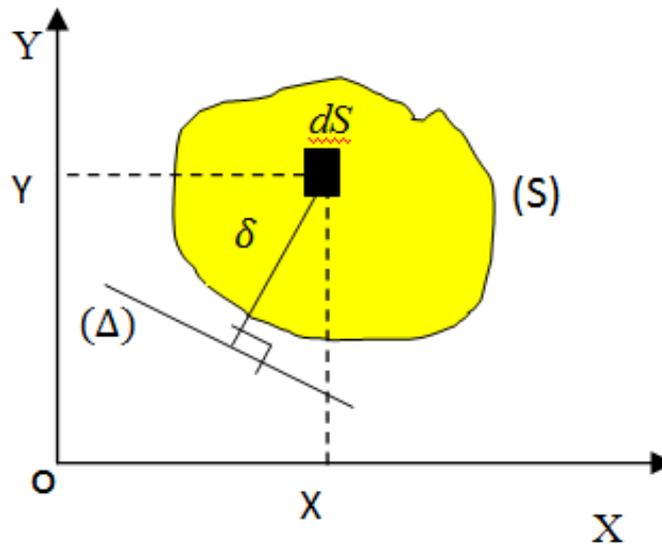


Figure 4.2 : Moment quadratique par rapport à un axe [10]

En particulier on a :

$$I_x = \iint_S Y^2 dS \quad ; \quad I_y = \iint_S X^2 dS \quad (2.7)$$

- L'axes passant par le centre de gravité d'une section s'appellent axes neutres G_x ou G_z et G_y .

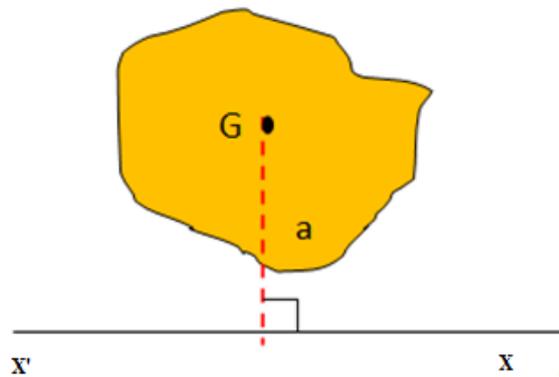


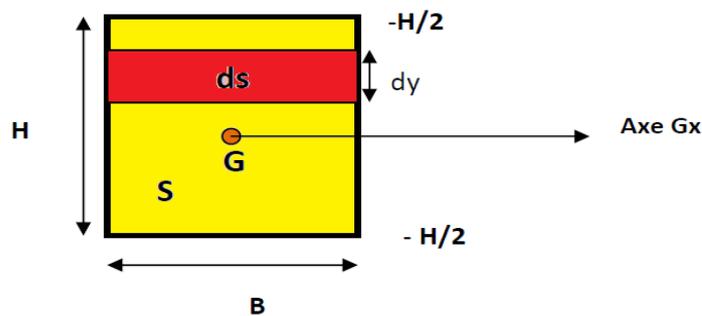
Figure 5.2 : Moment quadratique d'une section. [10]

$$I_{XX'} = \int_S a^2 ds \tag{2.8}$$

2.5.2 Exemple d'application 2 :

Exemple : calculer le moment d'inertie de cette section rectangulaire par rapport à l'axe neutre G_x

La solution :



$$I_{GX} = \iint_S Y^2 ds$$

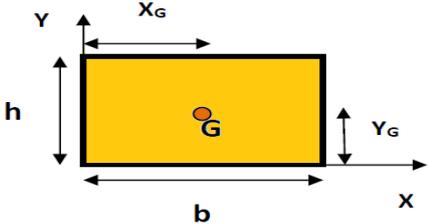
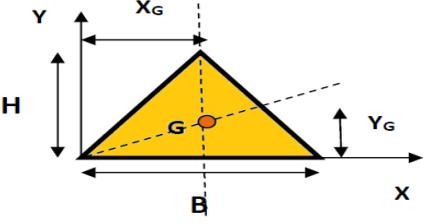
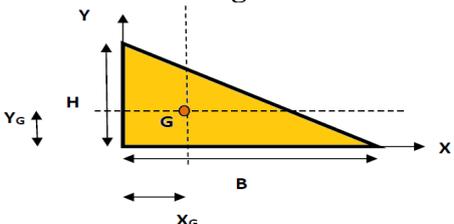
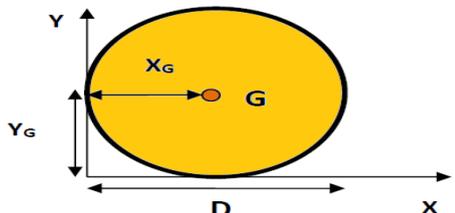
La formule devient :

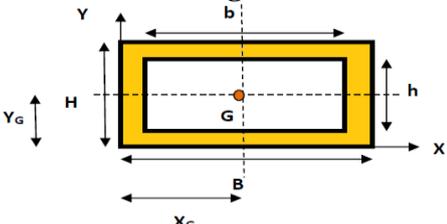
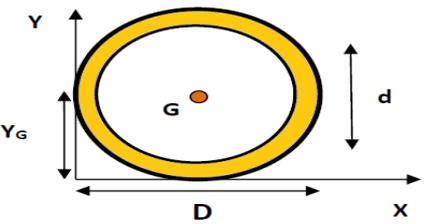
$$I_{GX} = \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-H/2}^{H/2} y^2 dx dy = [x]_{-B/2}^{B/2} \left[\frac{Y^3}{3} \right]_{-H/2}^{H/2}$$

Donc $I_{GX} = \frac{BH^3}{12}$

De la même façon, on peut démontrer que : $I_{GY} = \frac{B^3H}{12}$

Tableau 4.2: Exemples de moment quadratique pour une section plane [5]

La Section	I_{GX}	I_{GY}
<p>Section rectangulaire pleine</p> 	$I_{GX} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{GY} = \frac{b^3h}{12}$
<p>Section triangulaire isocèle</p> 	$I_{GX} = \frac{BH^3}{36}$	$I_{GY} = \frac{B^3H}{36}$
<p>Section triangulaire</p> 	$I_{GX} = \frac{B^3H}{36}$	$I_{GY} = \frac{B^3H}{12}$
<p>Section circulaire pleine</p> 	$I_{GX} = \frac{\Pi D^4}{64}$	$I_{GY} = \frac{\Pi D^4}{64}$

<p>Section rectangulaire creuse</p> 	$I_{GY} = \frac{H^3 B - h^3 b}{12}$	$I_{GX} = \frac{B^3 H - b^3 h}{12}$
<p>Section circulaire creuse</p> 	$I_{GX} = \frac{\Pi(D^4 - d^4)}{64}$	$I_{GY} = \frac{\Pi(D^4 - d^4)}{64}$

Remarque :

- Le moment d'inertie d'une section s'exprime en cm⁴ ou mm⁴
- Un moment d'inertie est toujours positif.
- Les moments d'inertie interviennent dans le calcul de la contrainte de cisaillement et de la contrainte normale (traction – compression).
- Les moments d'inertie les plus importants sont les moments par rapport aux axes neutres

2.5.3 Moment quadratique par rapport à un point

Le moment quadratique d'une surface plane par rapport à un point, également connu sous le nom de moment d'inertie polaire, est une mesure de la résistance d'une section à la torsion.. Pour un élément dS, à une distance r de O, le moment quadratique polaire élémentaire par rapport à ce point est par définition par l'intégrale suivante :

$$I_p = \iint_S r^2 dS \qquad I_p = \iint_S r^2 dx dy \qquad (2.9)$$

$$I_p = \iint_S (X^2 + Y^2) dS = \iint_S Y^2 dS + \iint_S X^2 dS = I_X + I_Y \qquad (2.10)$$

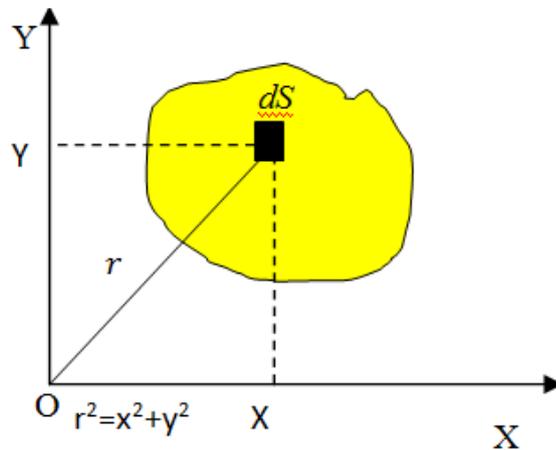


Figure 6.2 : Moment quadratique par rapport à un point

Remarque :

- I_x et I_y sont toujours positifs,
- Changement d'origine (Théorème de Huygens)

$$I_p = (I_{GX} + SY_G^2) + (I_{GY} + SX_G^2) \quad (2.11)$$

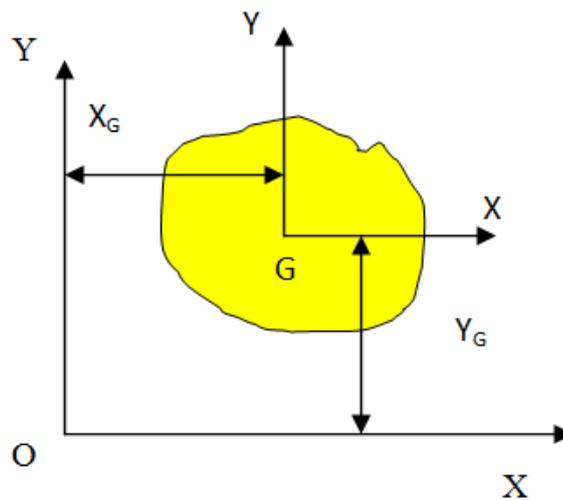


Figure 7.2 : Théorème de Huygens

2.5.4 Moment d'inertie par rapport à un couple d'axe

Le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à un couple d'axes, également appelé moments d'inertie produits, mesure la répartition de la surface par rapport à deux axes perpendiculaires. On appelle le Produit d'inertie, la caractéristique géométrique définie par l'intégrale suivante :

$$I_{OXY} = \iint_S XY dS \tag{2.12}$$

Théorème de Huygens: $I_{OXY} = I_{GXG} + S \cdot X_G \cdot Y_G$ (2.13)

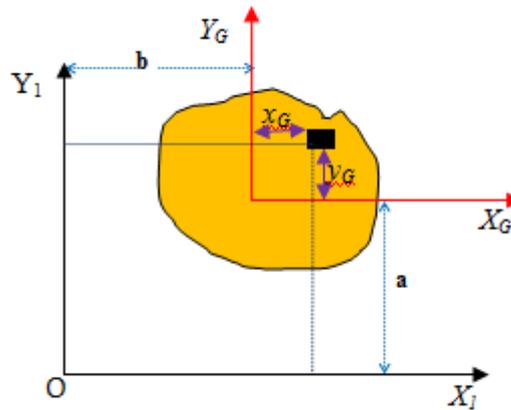


Figure 8.2 : Moment d’inertie par rapport à un couple d’axe

Les moments d'inertie produits sont utilisés pour analyser la torsion et la flexion des sections asymétriques. Ils sont particulièrement importants dans le calcul des contraintes et des déformations dans les structures soumises à des charges obliques.

En résumé :

- Le moment d'inertie produit I_{xy} est une mesure de la répartition de la surface par rapport à un couple d'axes perpendiculaires.
- Il est utilisé pour analyser les effets de torsion et de flexion dans les sections asymétriques.

Les moments d'inertie produits sont également importants dans la transformation des moments d'inertie lorsque l'on change les axes de référence (par exemple, lors de la rotation des axes de coordonnées).

Remarques :

- I_{OXY} peuvent être positif, négatif ou nul.
- Si les axes réciproquement perpendiculaire sont X et Y où l'un de ces axes constitue l'axe de symétrie de la figure, alors le produit d'inertie à ces axes $I_{OXY} = 0$

Calculs pratiques :

1-Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments produits connus I_{OXY_i} , alors:

$$I_{OXY} = \sum_{i=1}^n I_{Oxy_i} \tag{2.14}$$

2-Si on cherche le moment produit d'une section par rapport à son centre de gravité et que celle-ci peut être décomposée en n sous sections de centre de gravité G_i connus et de moments produits par rapport à leur centre de gravité connus $I_{G_{ixy}}$, alors:

$$I_{GXY} = \sum_{i=1}^n (I_{G_{i,xy}} + S_i (X_{G_i} - X_G)(Y_{G_i} - Y_G)) \tag{2.15}$$

2.6 Translation d'axes : Théorème de Huygens

Le théorème de Huygens, également connu sous le nom de théorème des axes parallèles, permet de déterminer le moment d'inertie d'une section par rapport à un axe décalé à partir du moment d'inertie de cette section par rapport à un axe parallèle passant par son centre de gravité.

Soit un élément dS de S dans le repère Oxy , et soit le repère Gxy qui passe par le centre de gravité G de S et dont les axes sont parallèles à Ox et Oy .

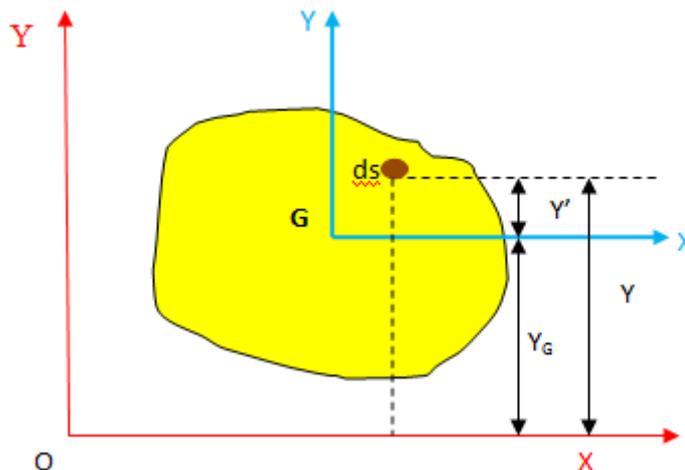


Figure 9.2 : Translation d'axes

$$dI_{Ox} = \iint_s Y^2 ds \tag{2.16}$$

Avec $Y = Y' + Y_G$

$$dI_{OX} = \iint_s (Y^2 + 2Y \cdot Y_G + Y_G^2) ds \quad (2.17)$$

Finalement, on obtient :

$$I_{OX} = I_{GX} + S Y_G^2 \quad (2.18)$$

$$I_{OY} = I_{GY} + S X_G^2 \quad (2.19)$$

Théorème de Huygens: Le moment d'inertie par rapport à un axe est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

Moments d'inertie ou quadratiques Calcul pratique : Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments quadratiques connus I_{OX_i} et I_{OY_i} , alors:

$$I_{OY} = \sum_{i=1}^n I_{OY_i} \quad I_{OX} = \sum_{i=1}^n I_{OX_i} \quad (2.20)$$

Remarque :

Le moment d'inertie de la section par rapport à son centre de gravité. Donc si la section peut être décomposée en n sous-sections S_i de centres de gravité G_i et de moments d'inertie $I_{G_{ix}}$ ou $I_{G_{iy}}$ connus:

$$I_{GX} = \sum \left(I_{G_{ix}} + s_i (Y_{G_i} - Y_G)^2 \right) \quad (2.21)$$

$$I_{GY} = \sum \left(I_{G_{iy}} + s_i (X_{G_i} - X_G)^2 \right) \quad (2.22)$$

2.7 Moments quadratiques d'axes concourants

Les moments quadratiques d'axes concourants se rapportent aux moments d'inertie et aux produits d'inertie lorsque les axes passent par un point commun, généralement le centre de gravité d'une section. Dans le contexte de la rotation d'axes, il est important de comprendre comment ces quantités se transforment lorsqu'on effectue une rotation des axes de référence.

2.7.1 Rotations d'axes

Soit une section plane S , ses moments d'inertie dans le système xoy I_x , I_y , I_{xy} sont connus. On se propose de calculer les moments d'inertie de la section S dans le système x_1oy_1 qui fait un angle de rotation α avec le système xoy .

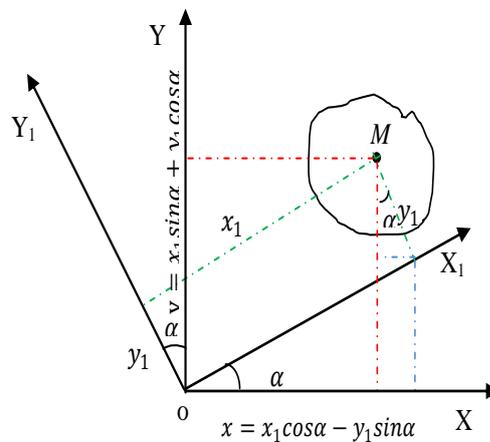


Figure 10.2 : Rotations d'axes

On a

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \text{ donc}$$

Calculons le moment quadratique I_{Ox_1} :

On obtient :

$$I_{Ox_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.23)$$

$$I_{Oy_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.24)$$

Calcul du moment produit :

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.25)$$

2.7.2 Recherche des directions principales

Les directions principales d'une section sont les orientations des axes dans lesquelles les produits d'inertie sont nuls. Ces axes sont appelés axes principaux d'inertie, et les moments d'inertie par rapport à ces axes sont appelés moments principaux d'inertie. Trouver les directions principales implique de déterminer les angles de rotation pour lesquels les produits d'inertie deviennent nuls. La détermination la position des deux axes principaux dont le moment d'inertie axial est maximal pour l'un et minimal pour l'autre revient à trouver l'angle α_0 qui fait ces axes avec les axes du premier système (Ox et Oy)

On a $I_{x_1} = I_y \sin^2 \alpha + I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.26)$

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = 2I_x \cos \alpha \sin \alpha + 2I_y \sin \alpha \cos \alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow (I_x + I_y) \cos \alpha \sin \alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

D'où:

$$tg 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (2.27)$$

Cette relation est satisfaite pour deux valeurs de α_0 entre 0 et π qui correspondent à un maximum I_{max} et un minimum I_{min} qui sont les moments principaux d'inertie :

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (2.28)$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (2.29)$$

Remarque:

- Pour les directions principales, I_{OXY} est nul.
- Tout axe de symétrie, est axe principal d'inertie.
- Tout axe perpendiculaire à un axe de symétrie est également axe principal d'inertie.

2.7.3 Représentation graphique – Cercle de Mohr

Reprenons les expressions donnant I_{Ox} et I_{Oxy} , Ce qui correspond à l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R :

$$X_c = \frac{I_x + I_y}{2} \quad (2.30)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (2.31)$$

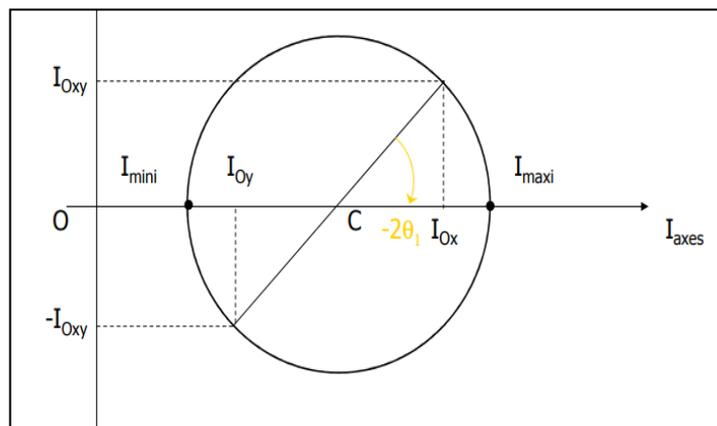
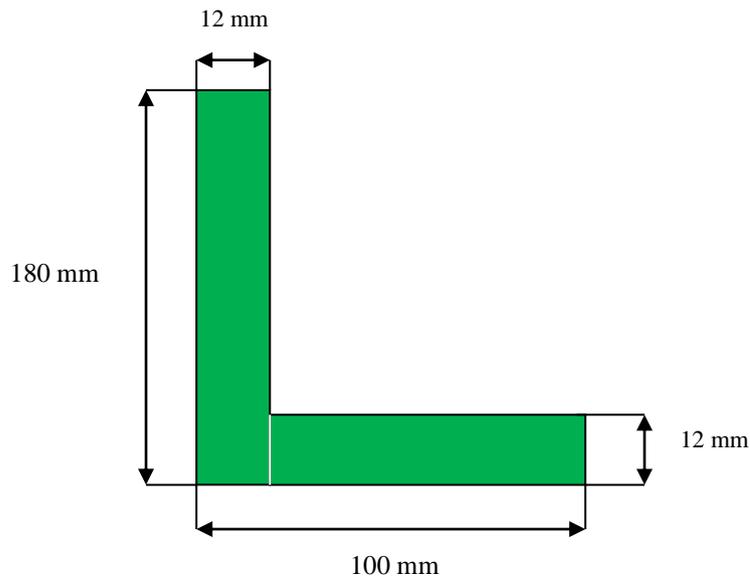


Figure 11.2 : Cercle de Mohr [6]

2.7.4 Exercice d'application 3 :

Soit la section représentée sur la figure ci-contre (les dimensions sont en mm)

- 1- Calculer les moments d'inertie centraux I_{GX} et I_{GY}
- 2- Calculer le produit d'inertie I_{XY}
- 3- Calculer les moments d'inertie principaux et l'angle d'orientation des axes principaux.



Solution :

1- Calcule des moments d'inerties centraux I_{GX} et I_{GY}

Calculons d'abord le centre de gravité :

	$S_i(\text{mm}^2)$	$x_{Gi}(\text{mm})$	$y_{Gi}(\text{mm})$	$X_{Gi} S_i(\text{mm}^3)$	$Y_{Gi} S_i(\text{mm}^3)$
S1	1200	50	6	60000	7200
S2	2016	6	96	12096	193536
Somme	3216			18096	200736

Le centre de gravité est égal :

$$Y_G = 62.417 \text{ mm}$$

$$X_G = 22.41 \text{ mm}$$

$$G (22.41; 62.417) \text{ mm}$$

$$I_{GX} = \sum (I_{G_i,X} + s_i (Y_{G_i} - Y_G)^2)$$

$$I_{GY} = \sum (I_{G_i,Y} + s_i (X_{G_i} - X_G)^2)$$

	$I_{G_{xi}} (\text{mm}^4)$	$I_{G_{yi}} (\text{mm}^4)$
S1	3833853.4668	1913449.72
S2	7015312.86	567076.80

$$I_{GX} = \sum \left(I_{G_iX} + s_i (Y_G - Y_{G_i})^2 \right) = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 x h_1 (Y_G - Y_{G1})^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 x h_2 (Y_G - Y_{G2})^2$$

$$= 10849166.333 \text{ mm}^4$$

$$I_{GY} = \sum_{i=1}^n \left(I_{G_iY} + s_i (X_G - X_{G_i})^2 \right) = \frac{b_1^3 h_1}{12} + b_1 x h_1 (X_G - X_{G1})^2 + \frac{b_2^3 h_2}{12} + b_2 x h_2 (X_G - X_{G2})^2 =$$

$$= 2480526.5296 \text{ mm}^4$$

2-Calculer le produit d'inertie I_{XY}

$$I_{GXY} = \sum_{i=1}^n \left(I_{G_i,xy} + S_i (X_{G_i} - X_G)(Y_{G_i} - Y_G) \right) = 29.79 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

3-Calculer les moments d'inertie principaux

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}} = 11.80 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}} = 1.52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

L'angle d'orientation des axes principaux :

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 17.72^\circ$$

Chapitre 3 :

*Traction simple et
compression simple*

Chapitre 3 Traction simple et Compression simple

3. Introduction

Le comportement des matériaux sous différentes sollicitations est essentiel en ingénierie et en construction. Ce chapitre se concentre sur deux types de contraintes fondamentales : la traction simple et la compression simple.

3.1 Définitions

3.1.1 Traction simple: Une poutre est considérée comme étant en traction simple lorsqu'elle est soumise à deux forces axiales opposées, appliquées au centre de ses extrémités. Ces forces agissent dans des directions opposées, provoquant une tension qui a pour effet d'allonger la poutre. Ce type de sollicitation est crucial dans de nombreuses applications d'ingénierie, notamment dans les structures de ponts et les câbles de soutien, où la résistance à la traction est essentielle pour maintenir l'intégrité structurelle.

3.1.2 Compression simple: Une poutre est en compression simple lorsqu'elle subit également deux forces axiales opposées, mais qui, cette fois, tendent à rapprocher les extrémités de la poutre. Ces forces, appliquées au centre des surfaces extrêmes, provoquent une réduction de la longueur de la poutre. La compression est un phénomène courant dans les colonnes et les poutres des bâtiments, où il est vital de concevoir des éléments capables de supporter des charges importantes sans fléchir ou s'effondrer.

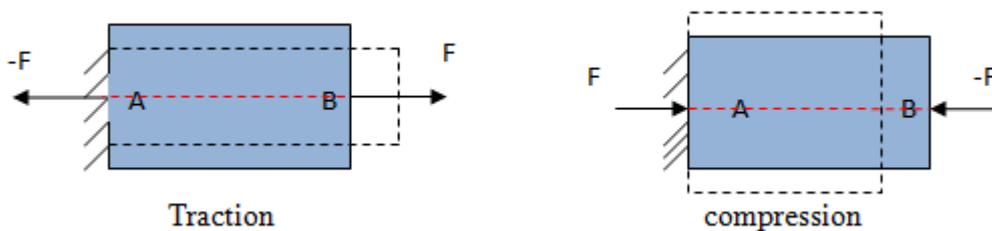


Figure 1.3 : Traction et compression

Une poutre est en traction (en compression) dès que le torseur des efforts intérieurs dans $(G ; x ; y ; z)$ s'exprime sous la forme suivante :

$$T_{int} = \begin{pmatrix} N_x \\ 0 \end{pmatrix}_G$$

Avec :

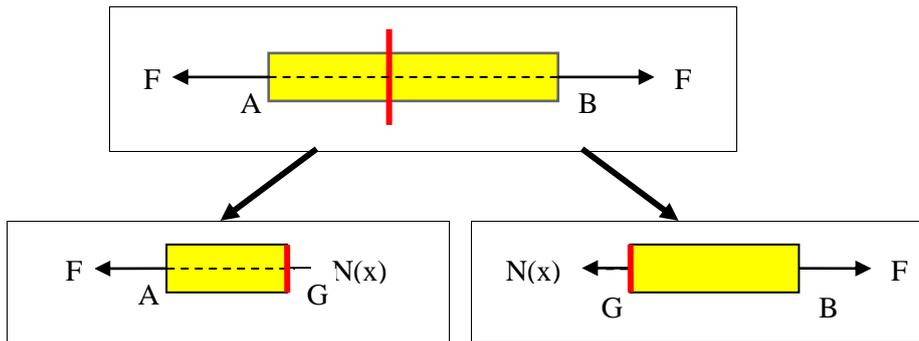
N : effort normal (effort extérieur)

Si $N > 0$: traction ;

Si $N < 0$: compression.

3.2 Effort normal

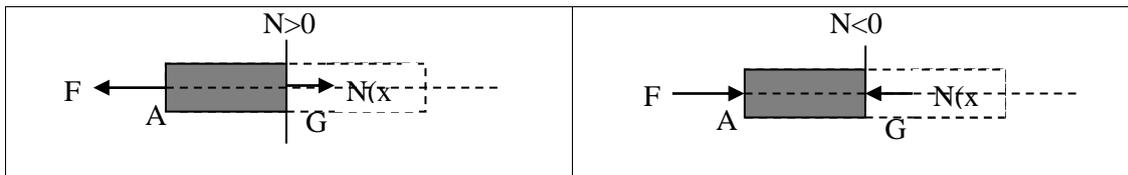
La mise en évidence de l'effort normal s'effectue par une coupe transversale. On considère qu'une partie est en équilibre lorsque l'on introduit, au niveau de cette section transversale, un effort normal $N(x)$ qui est perpendiculaire à la section, et que l'on désigne par le terme d'effort normal.



3.2.1 Calcul de l'effort normal

L'effort normal $N(x)$ représente la somme de toutes les forces extérieures agissant d'un côté (gauche ou droit) de la section considérée. Dans ce cas, les forces de cohésion se réduisent à une seule composante normale.

$$\begin{cases} N(x) \neq 0 \\ T(x) = 0 \\ M(x) = 0 \end{cases}$$



Equilibre des tronçons: $F = N(x)$

$$N_x = \sum f_x + \int \sum q_x dx$$

F_x : charge concentré

q_x : charge répartie

3.3 Contrainte normale

Pour une poutre, de section S , sollicitée à la traction simple, la valeur de la contrainte normale est égale au rapport de l'effort normal N par la section S . La contrainte normale dans une poutre peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Avec :

σ : contrainte normal en ($N/mm^2 = MPa$) ;

S : aire de la section droite de la pièce (mm^2) ;

N : effort normal en (N)

Remarque

Compression $N < 0 \longrightarrow \sigma < 0$ Raccourcissement

Traction $N > 0 \longrightarrow \sigma > 0$ Allongement

3.3.1 Essai de traction

Un essai de traction est un test standardisé qui mesure la résistance d'un matériau à la traction. Il consiste à étirer un échantillon de matériau jusqu'à ce qu'il se rompe. Un échantillon de matériau est placé dans une machine de traction qui applique une force croissante jusqu'à la rupture. Les mesures de force et d'allongement sont enregistrées pour établir une courbe contrainte-déformation.

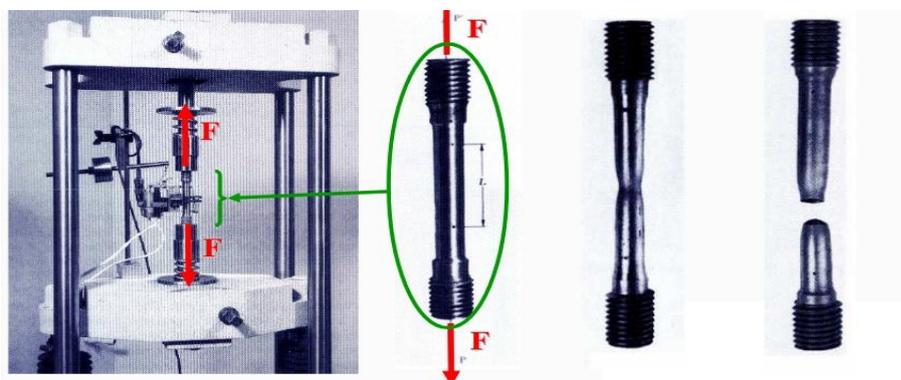


Figure 2.3 : Machine d'essais et éprouvette

3.3.2 Objectif de l'essai:

Détermination des propriétés mécaniques telles que la résistance à la traction, l'élongation, le module d'élasticité, et le point de rupture. En mécanique, l'essai de traction peut être utilisé pour évaluer la performance de composants mécaniques sous des charges de traction.

3.3.3 Diagramme contrainte-déformation

Le diagramme contrainte-déformation est un outil fondamental en mécanique des matériaux, utilisé pour décrire le comportement d'un matériau lorsqu'il est soumis à des charges. Le diagramme contrainte-déformation est utilisé pour concevoir des structures et des composants, en s'assurant qu'ils peuvent supporter les charges prévues sans défaillance. En étudiant le diagramme, les ingénieurs peuvent comprendre comment et pourquoi un matériau a échoué sous certaines conditions. La courbe représente la variation de la déformation en fonction de la contrainte.

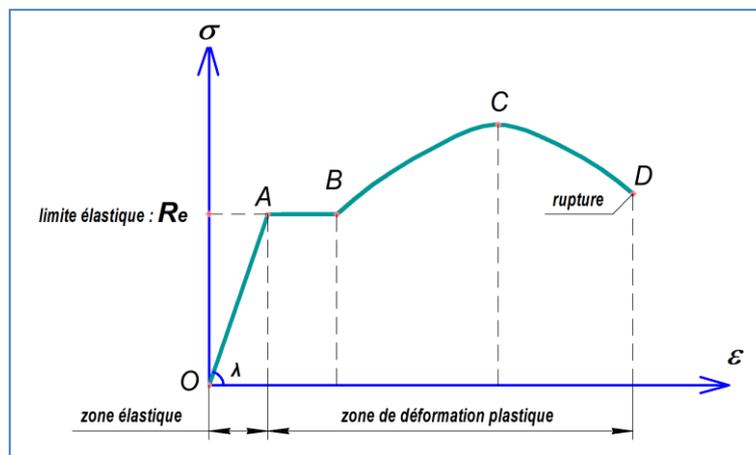


Figure 3.3 : Diagramme contrainte et déformation

- O à A : zone de déformation élastique (réversible): Dans cette zone, le matériau se déforme de manière réversible. Lorsque la contrainte est retirée, le matériau revient à sa forme originale. La pente de cette zone est appelée le module d'élasticité (ou module de Young).
- A à D : zone de déformation plastique: Au-delà d'un certain seuil de contrainte (appelé limite d'élasticité), le matériau commence à se déformer de manière permanente. Dans cette zone, même si la contrainte est retirée, le matériau ne revient pas à sa forme originale.
- Zone de rupture : C'est la région où le matériau finit par se rompre. La contrainte maximale atteinte avant la rupture est appelée contrainte de rupture.

➤ Déformation élastique

$$Re : \text{limite élastique} = \frac{F_e}{S} \text{ en Kgf/mm}^2$$

$$\epsilon : \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\text{Allongement}}{\text{allongement unitaire}}$$

➤ Loi de Hooke

La loi de Hooke est un principe fondamental en mécanique des matériaux qui décrit le comportement élastique des matériaux lorsqu'ils sont soumis à une contrainte. Elle énonce que, dans la limite d'élasticité d'un matériau, la déformation (ou l'allongement) d'un objet est proportionnelle à la force appliquée sur celui-ci. La loi de Hooke est une loi exprimant la relation linéaire entre les contraintes et les déformations dans le domaine élastique (OA):

$$\sigma = E\epsilon$$

E : module de Young (MPa)

ε : Déformation relatif

Le matériau est parfaitement élastique on aura donc :

$$\sigma = E\epsilon \longrightarrow \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = E \epsilon = E \frac{\Delta l}{l_0} \longrightarrow \Delta L = \frac{NL_0}{EA}$$

$$\text{Donc } \Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA} dx$$

- Module de Young E : est une mesure de la rigidité d'un matériau. Il est défini comme le rapport entre la contrainte (force par unité de surface) et la déformation (changement de longueur par rapport à la longueur initiale) dans la région élastique d'un matériau. En d'autres termes, il quantifie la capacité d'un matériau à se déformer de manière élastique lorsqu'il est soumis à une force.

Tableau 1.3 : Module de Young en daN/mm² de certains matériaux :

matériaux	Module de Young daN/mm ²
aciers	17 000 à 28 000
aciers de construction	20 000 à 22 000
fonte	10 000
verre	7 000 à 7 500
béton	2 500
bois	1 000 à 3 000
caoutchouc	0,75

3.4 Contrainte admissible et Condition de résistance

3.4.1 Contrainte admissible

En résistance des matériaux, une contrainte admissible est la valeur maximale de contrainte qu'un matériau peut supporter sans subir de défaillance, de rupture ou de déformation permanente. Elle est déterminée en tenant compte de divers facteurs, notamment les propriétés mécaniques du matériau, les conditions de chargement, la durée de l'application de la charge, et les facteurs de sécurité. La contrainte admissible notée σ_a est la contrainte maximale qu'une structure sans risque de rupture ni de déformation excessive.

$$\sigma_a < \sigma_u$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_u}{C_s}$$

Avec :

σ_u : Contrainte ultime

C_s : Coefficient de sécurité

Remarque :

Chaque matériau a deux contraintes admissibles à ne pas dépasser :

- Une contrainte admissible à la compression
- Une contrainte admissible à la traction

Ces deux résistances admissibles sont déterminées à partir des essais au laboratoire.

Dans le domaine de la structure en génie civil, il est essentiel de prendre en compte non seulement les contraintes admissibles à la compression et à la traction, mais également d'autres facteurs influençant la performance des matériaux. Par exemple, la résistance au cisaillement, qui est cruciale pour les éléments soumis à des forces latérales, doit également être évaluée. De plus, les conditions environnementales, telles que l'humidité, la température et l'exposition à des agents corrosifs, peuvent affecter la durabilité des matériaux au fil du temps. Les ingénieurs doivent donc réaliser des analyses approfondies, incluant des essais de fatigue et de vieillissement, afin de garantir que les structures répondent aux exigences de sécurité et de performance tout au long de leur cycle de vie. Ces considérations permettent d'optimiser la conception et d'assurer la pérennité des ouvrages construits.

3.4.2 Condition de résistance

La condition de résistance dans le domaine de la résistance des matériaux fait référence aux critères qui déterminent si un matériau ou une structure peut supporter les charges appliquées sans subir de défaillance. Ces conditions varient en fonction du type de matériau, de la nature des charges (statique ou dynamique), et des conditions environnementales. La condition de résistance pour une contrainte normale d'extension est :

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_a$$

$[\sigma]^+$ Contraint admissible de traction

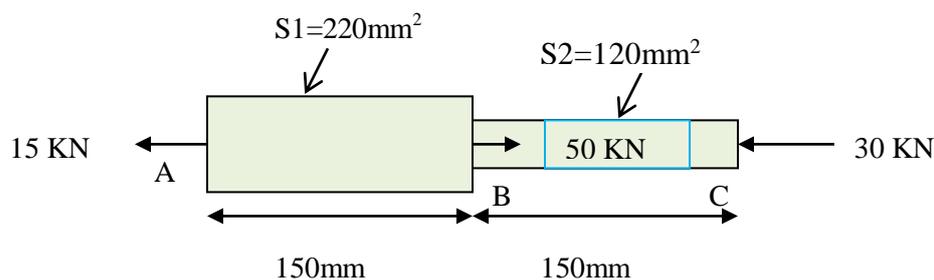
$[\sigma]^-$ Contrainte admissible de compression

3.5 Applications

3.5.1 Exercice 1: Analyse d'une barre en acier ABC soumise à des charges axiales

La barre en acier ABC est constituée de deux segments cylindriques de longueurs et de diamètres différents. On applique des charges axiales sur cette barre, et le module d'élasticité de l'acier est donné par ($E= 2 \times 10^5 \text{MPa}$). Cet exercice a pour but d'analyser le comportement de la barre sous l'effet de ces charges.

- 1-Tracer le diagramme de l'effort normal $N(x)$.
- 2-Calculer la déformation totale ΔL .
- 3- Calculer la contrainte normale dans chaque Zone.



La solution :

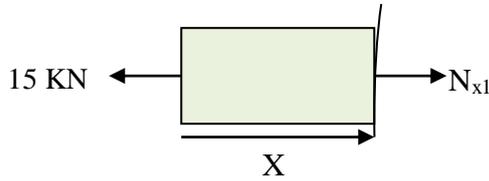
- 1- calcul l'effort normal dans chaque zone de la barre (zone AB-zone BC).

Pour commencer, il est essentiel de déterminer les forces appliquées sur la barre et de les représenter graphiquement. Le diagramme de l'effort normal $N(x)$ montre comment les forces internes varient le long de la longueur de la barre.

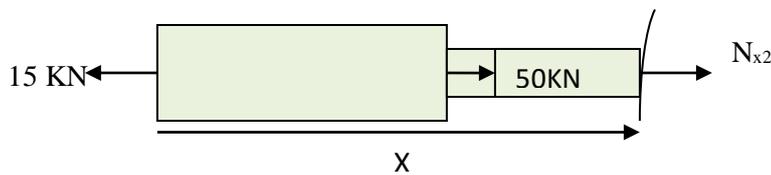
zone AB

$$\sum F_{/x} = 0 \longrightarrow -15 + N_{x1} = 0 \longrightarrow N_{x1} = 15\text{KN}$$

➤ Dans cette zone il y a de la traction



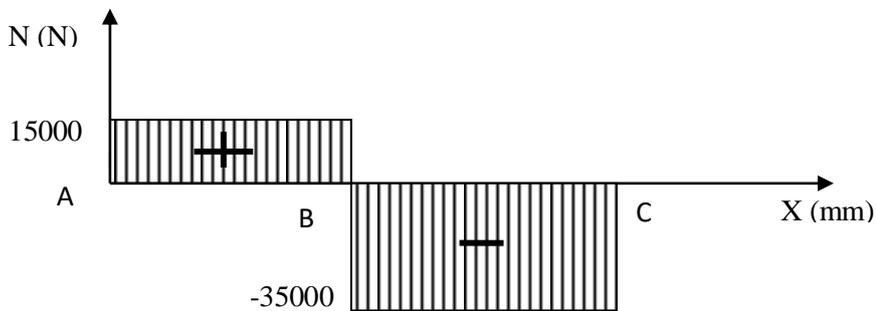
Zone BC



$$\sum F_{/x} = 0 \longrightarrow -15 + 50 + N_{x2} = 0 \longrightarrow N_{x2} = -35\text{ KN}$$

➤ Dans cette zone il y a une compression

Le diagramme de l'effort N (x)



2-Calcul de la déformation totale ΔL .

La déformation totale de la barre peut être calculée en utilisant la loi de Hooke, qui relie la contrainte, la déformation et le module d'élasticité. La déformation ΔL est la somme des déformations des deux segments :

D'après la loi de Hooke :

$$\sigma = \frac{N}{A} = E \varepsilon = E \frac{\Delta l}{l_0} \longrightarrow \Delta L = \frac{N L_0}{E A}$$

Zone AB

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_{x1} L_{AB}}{E S_1} = \frac{15 \times 10^3 \times 150}{2 \times 10^5 \times 220} = \frac{2250 \times 10^3}{440 \times 10^5} = +0.0511 \text{ mm}$$

$$\Delta L_{AB} = 0.0511 \text{ mm (Allongement)}$$

Zone Bc

$$\Delta L_{BC} = \frac{N_{x2} L_{BC}}{E S_2} = \frac{-35 \times 10^3 \times 150}{2 \times 10^5 \times 120} = \frac{-5250 \times 10^3}{240 \times 10^5} = -0.218 \text{ mm}$$

$$\Delta L_1 = -0.218 \text{ mm (Raccourcissent)}$$

La déformation totale $\Delta L = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC}$

$$\Delta L = 0.0511 - 0.218 = -0.1669 \text{ mm}$$

3-Calcul la contrainte normale dans chaque segment :

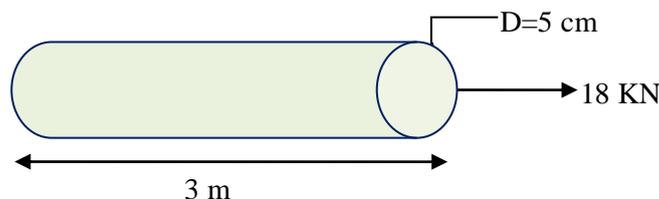
$$\sigma = \frac{N_{x1}}{s1} = \frac{15 \times 10^3}{220} = 68.18 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{N_{x2}}{s2} = \frac{-35 \times 10^3}{120} = -291.67 \text{ N/mm}^2$$

3.5.2 Exercice 2 : Analyse d'une Barre en Acier Soumise à un Effort de Traction

Une barre en acier de diamètre $D = 4 \text{ cm}$ et de longueur 3 m est soumise à un effort de traction de 20 KN , La contrainte admissible de l'acier vaut $= 50 \text{ MPa}$ et $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$:

- 1- Calculer la contrainte de traction.
- 2- Vérifier si la contrainte calculée est inférieure à la contrainte admissible $\sigma_{adm} = 50 \text{ MPa}$.
- 3- Calculer l'allongement ΔL



Solution de l'exercice 2 :

1-Calcul de la contrainte de traction :

On a: $\sigma = N/A$ Avec $A = \pi D^2/4 = \pi * (5^2)/4 = 19.625 \text{ cm}^2 = 1962,5 \text{ mm}^2$

$$\text{Donc : } \sigma = N/A = \frac{N}{A} = \frac{18 \times 10^3}{1962,5} = 09,17 \text{ N/mm}^2$$

2-vérification du critère de résistance.

On a : $\sigma = 09.17 \text{ MPa} \leq \sigma_{\text{adm}} = 50 \text{ MPa}$, alors la barre est vérifiée en traction.

3-Calcul de l'allongement :

$$\text{On a : } \Delta L = \frac{NL_0}{EA} = \frac{18000 \times 3000}{2 \times 10^5 * 1962,5} = \frac{54\,000\,000}{392\,500\,000} = 0.1375 \text{ mm}$$

Cet exercice permet d'évaluer la résistance et la déformation d'une barre en acier soumise à un effort de traction, en vérifiant si elle respecte les critères de sécurité définis par la contrainte admissible.

Chapitre 4

Flexion Simple

Chapitre 4 : Flexion simple

4 Introduction

Dans ce chapitre, nous explorerons la flexion des poutres, en mettant en lumière les caractéristiques spécifiques des poutres soumises à ce type de sollicitation. Nous analyserons les diagrammes de la force de cisaillement et du moment fléchissant, et apprendrons à calculer la contrainte maximale dans les poutres courbes. Nous aborderons également les conditions de résistance nécessaires pour dimensionner et concevoir des poutres courbées, ainsi que les méthodes de calcul de leur déformation.

4.1 Définitions et hypothèses

4.1.1 Définition :

Une poutre est considérée soumise à une flexion simple lorsque toutes les forces qui s'exercent sur elle sont perpendiculaires à son axe neutre. Les fibres situées dans la partie supérieure de la poutre subissent une compression, tandis que celles dans la partie inférieure sont en traction.

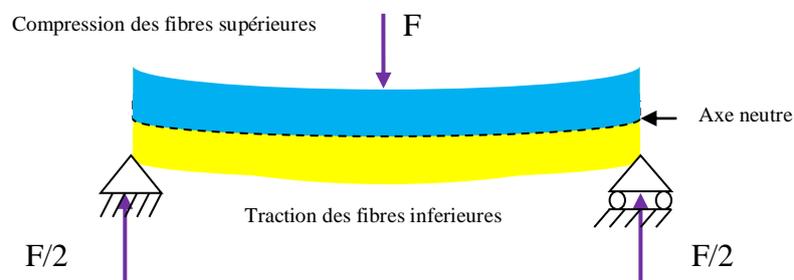


Figure 1.4 : Courbure d'une poutre soumise à la flexion.

- Si $T_y = 0$ est nul, alors la sollicitation est appelée flexion pure

$$T_{coh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{bmatrix}$$

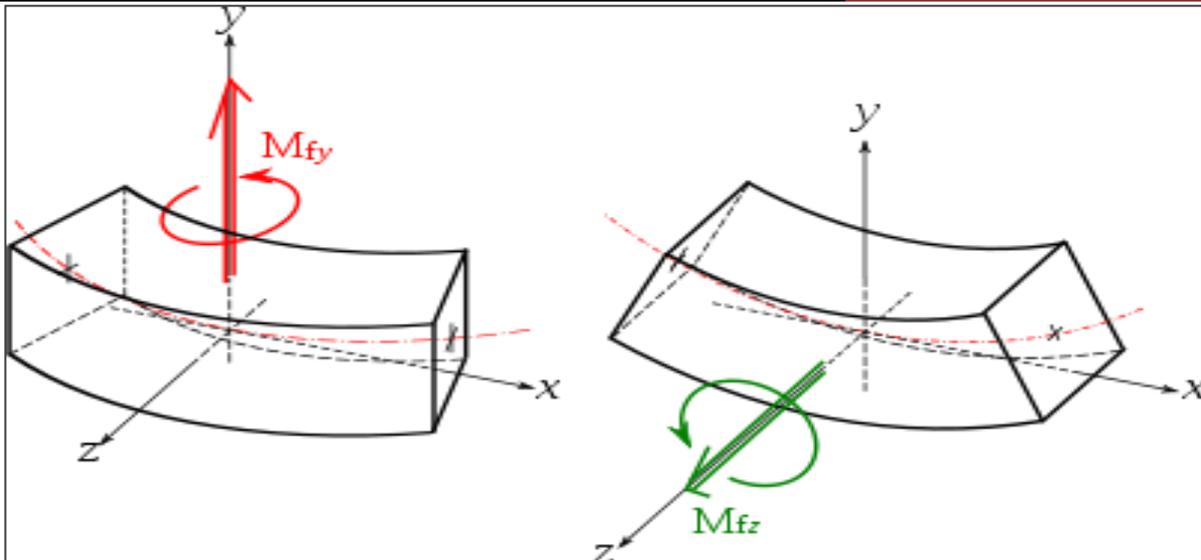


Figure 2.4 : Composantes du torseur de cohésion (T_y avec M_{fz} , T_z avec M_{fy}) [20].

4.1.2 Hypothèses

- Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives, assurant ainsi la linéarité des relations entre contraintes et déformations.
- Toute fibre située dans un plan de symétrie de la poutre reste dans ce plan pendant la déformation, ce qui signifie que la déformation respecte la symétrie initiale de la structure.
- Hypothèse de Navier-Bernoulli : Les sections droites de la poutre restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre après déformation, ce qui implique que les déformations sont proportionnelles à la distance par rapport à l'axe neutre et que les effets de cisaillement transversal sont négligeables.
- Les matériaux utilisés pour la poutre sont homogènes et isotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions.
- L'effet de la flexion pure est considéré, excluant ainsi les effets de torsion ou de flexion composée.

4.2 Efforts intérieurs (Effort tranchant, Moment fléchissant)

Lors de la flexion, les efforts intérieurs dans toute section droite d'une poutre se résument à deux composantes principales : l'effort tranchant T , qui est perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre, et le moment fléchissant M_f , qui est perpendiculaire à la fois à l'axe neutre et à l'effort tranchant T .

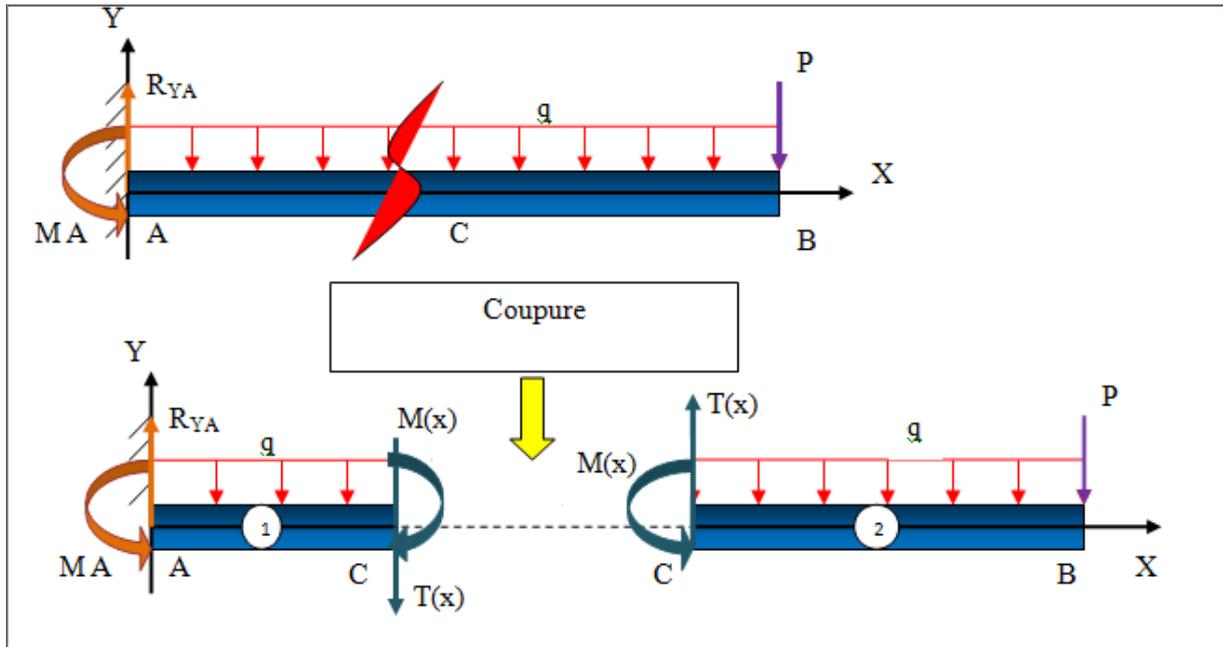


Figure 3.4 : Les efforts internes dans la poutre [19]

Pour mettre en évidence les efforts internes, une coupe virtuelle est réalisée à une distance x de l'origine A. En isolant la section 1, on obtient l'effort tranchant T et le moment de flexion M_f (en réalité, on obtient respectivement $-T$ et $-M_f$)

4.3 Relation différentielle entre la charge, l'effort tranchant et le moment fléchissant

4.3.1 Relation entre l'effort tranchant, le moment fléchissant et le chargement réparti

Considérons le cas d'une charge répartie, notée $q(x)$. La charge totale appliquée sur un élément de longueur infinitésimale dx est $q dx$ (voir Figure 28.4).

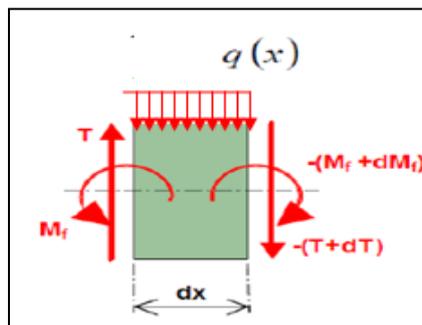


Figure 4.4 : Élément de poutre isolé chargé par force répartie [19]

L'équilibre des forces sur l'élément:

$$T - q(x) dx - T - dT = 0$$

Ce qui veut dire que:

$$\frac{dT}{dx} = -q(x)$$

L'équilibre des moments donne:

$$M_f + T dx - \underbrace{q dx}_{0} \frac{dx}{2} - M_f - dM_f = 0 \implies \frac{dM_f}{dx} = T \tag{4.1}$$

Remarque :

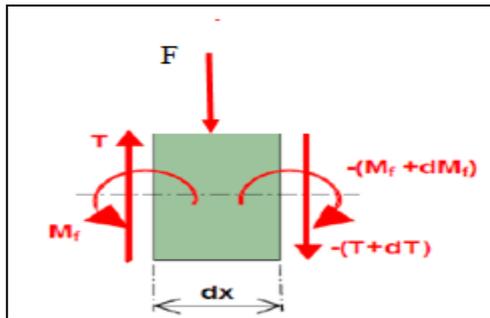


Figure 5.4 : Élément de poutre isolé chargé par une force concentrée [19] .

Dans le cas d'une charge concentrée (Figure. 29.4), l'équilibre s'écrit:

$$T = (T+dT) - F$$

Donc, finalement, les grandeurs M (moment fléchissant), T (effort tranchant) et q (charge répartie) sont liées par la relation de Jouraevsky :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q \tag{4.2}$$

4.3.2 Relation entre moments fléchissant et efforts tranchants

L'étude de l'équilibre de la section de largeur dx appartenant à la poutre, compte tenu des charges indiquées, (Figure 30.4) :

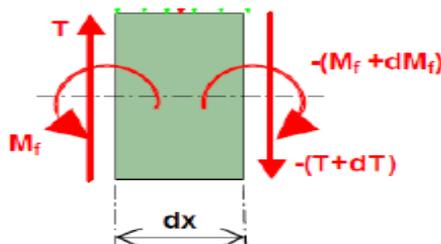


Figure 6.4 : Élément de poutre isolé sans charge [19].

L'effort interne de la partie gauche sur l'élément est représentée par T et M_f

L'effort interne de la partie droite sur l'élément est représentée par $(T+dT)$ et (M_f+dM_f)

L'équilibre de l'élément s'écrit:

$$T \, dx + M_f - (T + dT)dx - (M_f + dM_f) = 0$$

$$\frac{dM_f}{dx} = T(x) \quad (4.3)$$

4.4 Diagrammes des efforts tranchants $T(x)$ et des moments de flexion $M_f(x)$

Les efforts tranchants T et les moments de flexion M_f varient selon la position x de la coupe virtuelle le long de la poutre. En traçant les diagrammes de $T(x)$ et $M_f(x)$, on peut visualiser l'évolution de ces forces internes et identifier les valeurs maximales critiques pour le calcul des contraintes. Ces diagrammes sont obtenus en appliquant la méthode des sections (voir Chapitre 1).

4.5 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

La poutre subit une déformation lorsqu'elle est soumise à des charges externes. Le déplacement du centre de gravité de chaque section transversale le long de la poutre est représenté par l'abscisse x et est indiqué par des flèches. Le tracé de ces déplacements pour l'ensemble des sections constitue la courbe de déformation de la poutre (Figure 31.4).

4.5.1 Définition de la courbe de déformation

La courbe de déformation représente le chemin parcouru par le centre de gravité des sections transversales sous l'effet des charges appliquées. Elle est un indicateur clé de la manière dont la poutre se déforme sous contrainte, offrant une vue d'ensemble des déplacements longitudinaux au sein de la structure. Cette courbe est essentielle pour l'analyse des déformations, car elle permet de quantifier la flexion et de déterminer les points critiques où les contraintes maximales sont susceptibles de se produire.

4.5.2 Importance de la courbe de déformation

L'étude de la courbe de déformation est fondamentale pour le dimensionnement et l'analyse structurelle. Elle permet d'évaluer la rigidité de la poutre et de prédire les zones de déformation maximale, ce qui est crucial pour garantir que la structure peut supporter les charges sans dépasser les limites admissibles de déformation. En outre, elle aide à comprendre

le comportement global de la poutre, en particulier dans des situations où la flexion est importante.

4.5.3 Méthodes d'analyse

Pour tracer et analyser la courbe de déformation, plusieurs méthodes peuvent être utilisées, notamment la méthode des sections, le principe des superpositions, et les théories de la flexion des poutres. Chacune de ces méthodes offre des perspectives différentes, mais complémentaires, pour comprendre comment la poutre réagit aux forces externes.

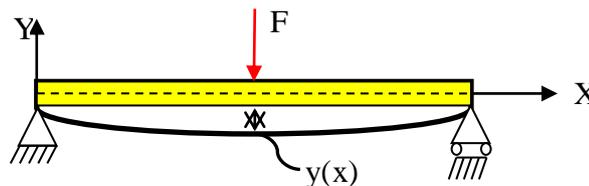


Figure 7.4 : Poutre déformée.

La relation suivante qui permet le calcul de la déformée :

$$M_f = -EIy'''' \quad (4.4)$$

Avec :

M_f : le moment fléchissant (équation en x)

E : le module d'élasticité longitudinale (MPa)

Y'' : la dérivée seconde de la déformée y

I : le moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm^4)

4.5.4 Calcul de la flèche de la poutre : Méthode d'intégration

Pour déterminer la flèche y d'une poutre, il est nécessaire d'intégrer l'équation (4.4) à deux reprises. Cette double intégration génère une équation qui inclut deux constantes d'intégration. Ces constantes sont déterminées en appliquant les conditions aux limites appropriées.

Conditions aux limites

Les constantes d'intégration obtenues lors du processus d'intégration sont évaluées en utilisant les conditions aux limites spécifiques à la poutre, comme illustré à la figure 32.4. Ces conditions aux limites peuvent inclure, par exemple, des points où la flèche est nulle (comme

aux appuis fixes) ou des points où la dérivée de la flèche est nulle (indiquant une pente nulle à ces points). En appliquant ces conditions, on peut résoudre les équations pour déterminer les valeurs exactes des constantes, permettant ainsi de calculer la flèche en tout point de la poutre.

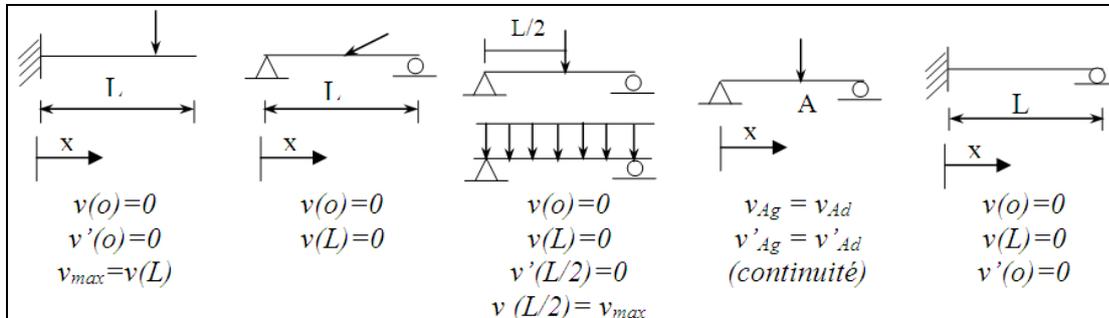


Figure 8.4 : Condition aux limites [19]

4.6 Dimensionnement : Calcul des contraintes

Lorsqu'une poutre est soumise à une flexion simple, elle subit non seulement des contraintes normales, mais également des contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant. Le dimensionnement de la poutre nécessite donc de calculer et d'analyser ces deux types de contraintes afin de s'assurer que la structure peut supporter les charges appliquées sans dépasser les limites de résistance du matériau

4.6.1 Contrainte normale en flexion simple

En flexion simple, une poutre subit des contraintes normales, qui se distribuent le long de sa section transversale. Ces contraintes sont maximales aux fibres extrêmes (les plus éloignées de l'axe neutre) et s'annulent au niveau de cet axe. La contrainte normale de flexion est proportionnelle à la distance de la fibre par rapport à l'axe neutre, et elle est donnée par la formule suivante :

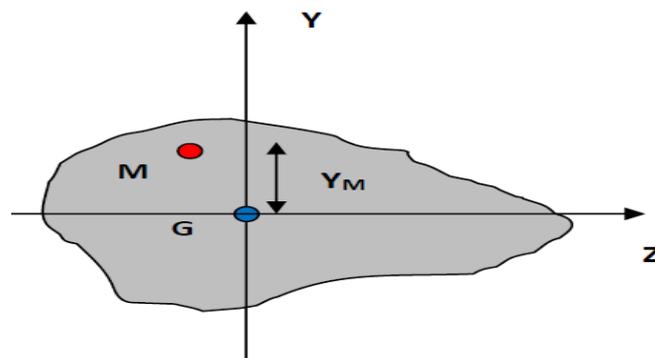


Figure 9.4 : Contrainte normale de flexion simple

La contrainte normale de flexion en un point M de la section s'exprime par :

$$\sigma_M = \frac{M_{fz}}{I_Z} y_M \tag{4.5}$$

Avec :

σ_M : Contrainte normale en point M en MPa.

I_Z : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe horizontal. (Noté aussi I_{GX})

M_{fz} : Moment fléchissant dans la section.

Y_M : La distance du C.D.G de la section à la fibre la plus éloignée.

Lorsqu'une poutre fléchit :

- La partie supérieur se raccourcie par compression.
- La partie inferieur de la poutre s'allonge par traction

Entre les deux zones il existe une partie longitudinal qui n'a subit ni allongement, ni raccourcissent elle passe par le centre de gravité c'est l'axe neutre.

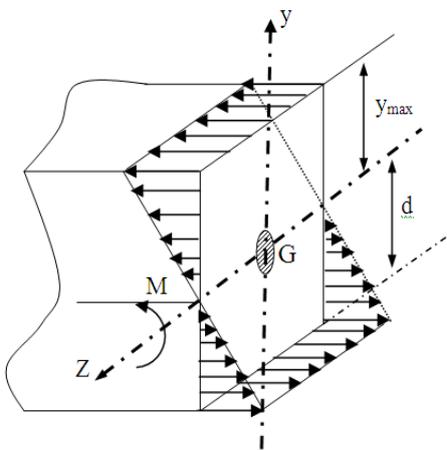


Figure 10.4 : section rectangulaire [15]

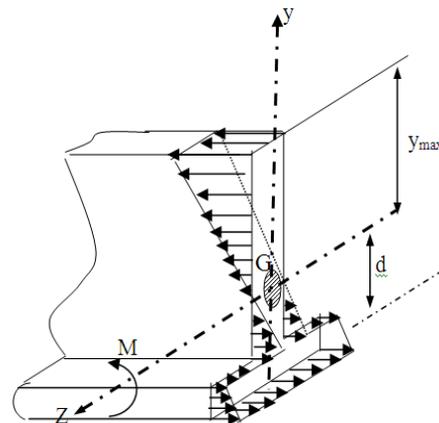


Figure 11.4 : section en T [15]

1- Cas d'une section symétrique

Lorsque la poutre possède une section symétrique par rapport à l'axe neutre (par exemple, une section rectangulaire, circulaire ou en I), la distribution des contraintes normales en flexion présente une symétrie similaire. Dans ce cas, l'axe neutre coïncide avec l'axe de symétrie de la section, ce qui simplifie l'analyse.

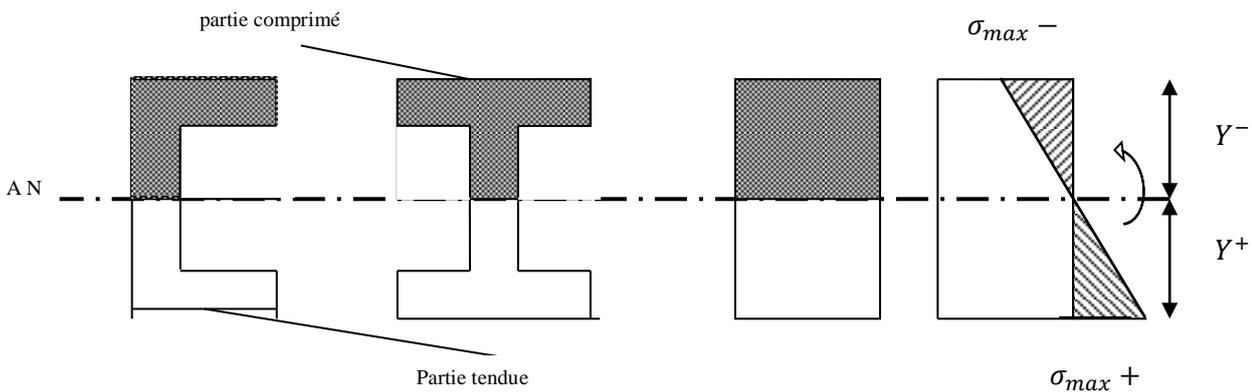
Pour une section symétrique, les contraintes normales σ atteignent des valeurs égales en magnitude, mais de signes opposés, aux fibres supérieures et inférieures. La contrainte maximale se situe toujours aux fibres les plus éloignées de l'axe neutre et est donnée par :

On a :

$$|Y^+| = |Y^-|$$

$$|\sigma_{max +}| = |\sigma_{max -}| = \sigma_{max} = \frac{M_f}{I_x} Y_{max}$$

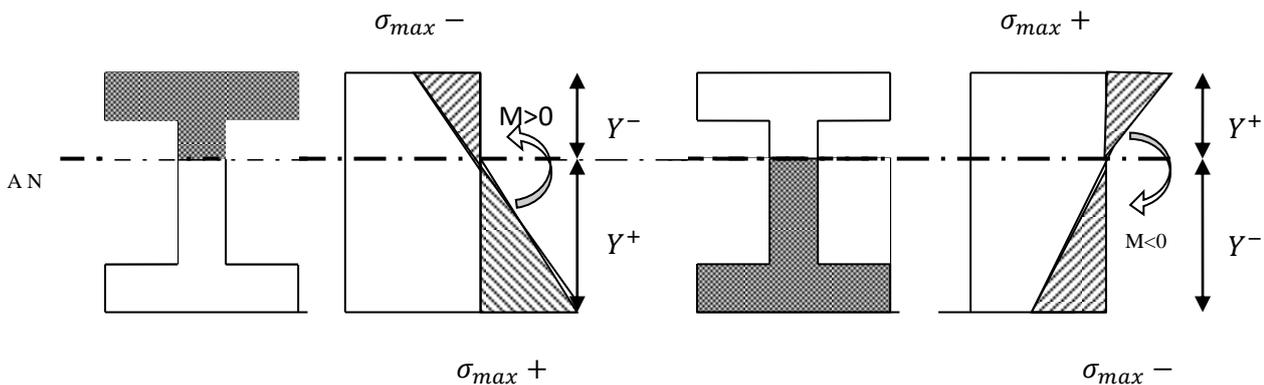
$$|Y^+| = |Y^-|$$



2- Cas d'une section sans axe de symétrie horizontale

Lorsque la section de la poutre n'a pas d'axe de symétrie horizontale, la distribution des contraintes normales en flexion devient asymétrique. Dans ce cas, les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes et ne se produisent pas nécessairement aux mêmes distances par rapport à l'axe neutre.

Pour une telle section, l'axe neutre n'est pas situé au centre de la section, ce qui fait que les fibres situées au-dessus et au-dessous de cet axe subissent des contraintes de magnitudes différentes. La contrainte maximale de traction (dans la zone en tension) et la contrainte maximale de compression (dans la zone en compression) sont calculées selon les formules suivantes :



$$\left| \sigma_{\max}^- \right| = \left| \frac{M_f}{I_x} Y_{\max}^- \right| \qquad \left| \sigma_{\max}^+ \right| = \left| \frac{M_f}{I_x} Y_{\max}^+ \right|$$

Avec :

σ_{\max}^+ + Contrainte de traction max

σ_{\max}^- - Contrainte de compression max

4.6.2 La contrainte tangentielle

Dans le cas de la flexion simple, en plus du moment fléchissant qui varie le long de la poutre, il existe une composante due à l'effort tranchant T . Ainsi, en plus de la contrainte normale σ , la poutre est également soumise à une contrainte tangentielle τ , qui agit parallèlement à la section transversale. La contrainte tangentielle τ_{xy} peut être calculée à l'aide de l'équation de Jouravski :

Cette contrainte tangentielle τ_{xy} est particulièrement significative près des appuis, où l'effort tranchant est généralement maximal. Elle joue un rôle crucial dans l'analyse des structures, car elle peut provoquer des glissements internes dans le matériau, ce qui peut conduire à des phénomènes comme le cisaillement ou la rupture par cisaillement. Il est donc essentiel de la prendre en compte lors du dimensionnement pour garantir la sécurité et la stabilité de la poutre.

$$\tau_{xy} = \frac{T_y W_z}{I_z b} \tag{4.6}$$

W_z : Représente le moment statique de la région en Rouge de la section par rapport à la fibre moyenne.

b : est la largeur de poutre à l'endroit où est calculée la contrainte tangentielle.

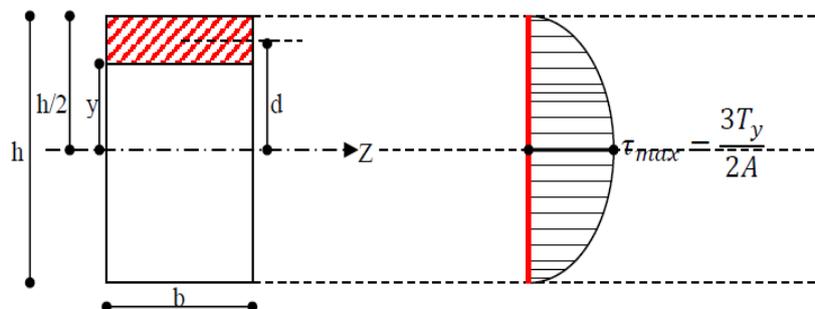


Figure 12.4 : Répartition des contraintes tangentielles

4.7 Condition de résistance :

➤ Contrainte normale

La vérification d'une poutre en flexion implique d'examiner les conditions de résistance à la compression et à la traction. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer les contraintes maximales de traction et de compression générées dans la poutre sous l'effet du moment de flexion. Ces contraintes sont ensuite comparées aux contraintes admissibles du matériau, qui sont des valeurs connues provenant des spécifications du matériau.

$$[\sigma] = \sigma_{adm} \quad (4.7)$$

➤ Section symétrique

$$[\sigma] \geq |\sigma^+ \max|$$

➤ Section non symétrique

$$\text{Si } [\sigma] = [\sigma^- \max] = [\sigma^+ \max] \longrightarrow [\sigma] \geq \max([\sigma^- \max], [\sigma^+ \max])$$

$$\text{Si } [\sigma^- \max] \neq [\sigma^+ \max] \implies \begin{cases} [\sigma^-] \geq |\sigma^- \max| \\ [\sigma^+] \geq |\sigma^+ \max| \end{cases}$$

➤ Contrainte tangentielle

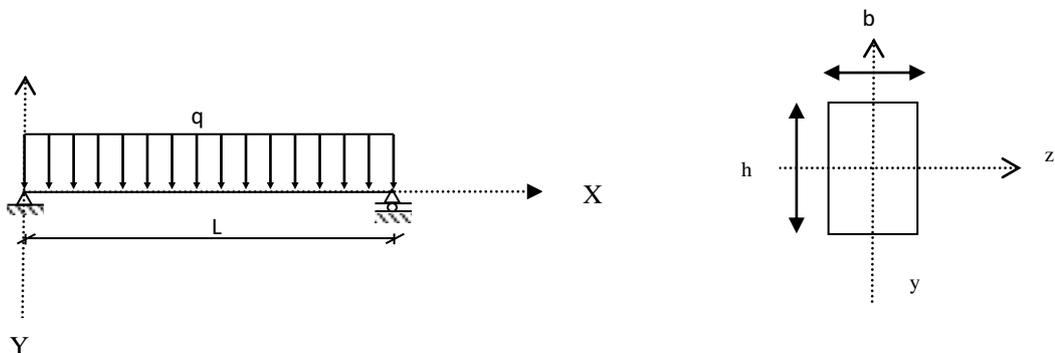
Pour garantir que la poutre résiste adéquatement au cisaillement, il est essentiel que la contrainte tangentielle maximale calculée τ ne dépasse pas la limite élastique pratique au cisaillement τ_{adm} du matériau. La contrainte tangentielle maximale est calculée à partir de l'effort tranchant appliqué et de la géométrie de la section, comme indiqué par l'équation de Jouravski ou d'autres méthodes appropriées. La limite élastique pratique au cisaillement représente la contrainte maximale que le matériau peut supporter sans subir de défaillance par cisaillement. La condition de vérification est donc :

$$\tau_{\max} = \frac{T_{y \max} W_z}{I_z b} \leq \tau_{adm} \quad (4.8)$$

4.8 Exercice d'application

Soit une poutre reposant sur deux appuis, l'un simple et l'autre double et supportant une charge uniformément répartie q sur toute sa longueur. La section droite de la poutre est rectangulaire (voir figure ci-contre).

1. **Calcul des réactions d'appuis** : Déterminer les réactions aux appuis en utilisant les équations d'équilibre statique.
2. **Tracé des diagrammes des efforts internes** : Tracer les diagrammes des efforts normaux $N(x)$, des efforts tranchants $T(x)$, et des moments de flexion $M_z(x)$ le long de la poutre.
3. **Contrainte de flexion maximale** : Calculer la contrainte de flexion maximale dans la poutre, en utilisant la relation entre le moment de flexion et la contrainte de flexion dans une section rectangulaire.
4. **Contrainte tangentielle maximale** : Calculer la contrainte tangentielle maximale dans la poutre, en utilisant la relation entre l'effort tranchant et la contrainte tangentielle dans une section rectangulaire.
5. **Tracé des diagrammes des contraintes normales et tangentielles** : Tracer les diagrammes de la contrainte normale σ_x et de la contrainte tangentielle τ_x le long de la poutre.
6. **Déformée et flèche de la poutre** : En utilisant la méthode d'intégration et en considérant que la rigidité EI de la poutre est constante le long de sa longueur, déterminer les expressions analytiques de la déformée $v(x)$ et de la flèche $f(x)$.
7. **Expressions maximales de la flèche et de l'angle de rotation** : Calculer les valeurs maximales de la flèche f_{max} et de l'angle de rotation θ_{max} aux points critiques de la poutre.



Solution:**Données de l'exercice :**

- Longueur de la poutre : L
- Charge uniformément répartie : q
- Largeur de la section rectangulaire : b
- Hauteur de la section rectangulaire : h
- Module de Young du matériau : E
- Moment d'inertie de la section : $I = \frac{bh^3}{12}$

1. Calcul des réactions d'appuis :

La poutre est soumise à deux appuis : un appui simple en B et un appui double en A . La poutre est soumise à une charge uniformément répartie q sur toute sa longueur L .

1.1 Équations d'équilibre :

Pour déterminer les réactions aux appuis R_A et R_B , on utilise les équations d'équilibre statique.

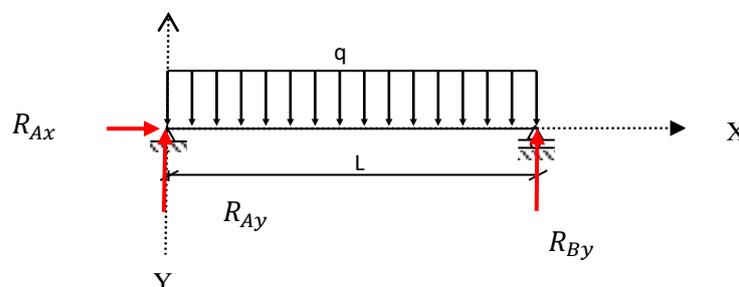
Équilibre en translation verticale : La somme des forces verticales doit être nulle.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_B = qL$$

Par symétrie $R_{Ay} = R_{By} \rightarrow 2 R_{Ay} = qL \rightarrow R_{Ay} = \frac{qL}{2}$ d'ou $R_{Ay} = R_{By} = \frac{qL}{2}$

Équilibre en translation horizontale : La somme des forces horizontales doit être nulle.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$$



Équilibre en rotation autour de l'appui A : La somme des moments autour de A doit être nulle. En prenant les moments autour de A, on élimine R_{Ay} de l'équation, ce qui permet de déterminer R_{By} .

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_{By}L = q \frac{L \times L}{2} \rightarrow R_{By} = q \frac{L}{2}$$

Ces valeurs indiquent que les deux appuis supportent chacun la moitié de la charge totale appliquée sur la poutre.

2. Tracé des diagrammes des efforts internes :

Diagramme des efforts Normaux $N(x)$

L'effort normale en un point x de la poutre est donné par :

$$N(x) = -R_{Ax} = 0$$

l'effort normale est nulle le long de la poutre.

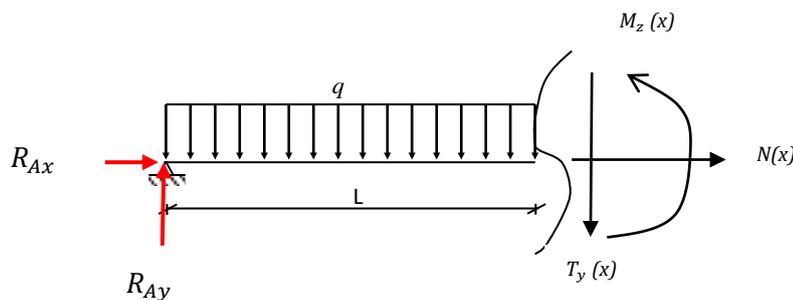


Diagramme des efforts Tranchant $T_y(x)$

L'effort tranchant en un point x de la poutre est donné par :

Pour $0 \leq x \leq L$

$$-T_{y(x)} - qx + q \frac{L}{2} = 0 \rightarrow -T_{y(x)} = qx - q \frac{L}{2} \rightarrow T_{y(x)} = -qx + q \frac{L}{2}$$

$$\text{Pour } x = 0 \rightarrow T_{y(0)} = q \frac{L}{2}$$

$$\text{Pour } x = \frac{L}{2} \rightarrow T_{y(\frac{L}{2})} = -q \frac{L}{2}$$

Le diagramme de l'effort tranchant $T(x)$ est donc une droite qui décroît linéairement de $q \frac{L}{2}$ à $-q \frac{L}{2}$.

Diagramme des Moment de flexion $M_z(x)$:

Le moment de flexion en un point x de la poutre est donné par :

$$M_z(x) = R_{Ay} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

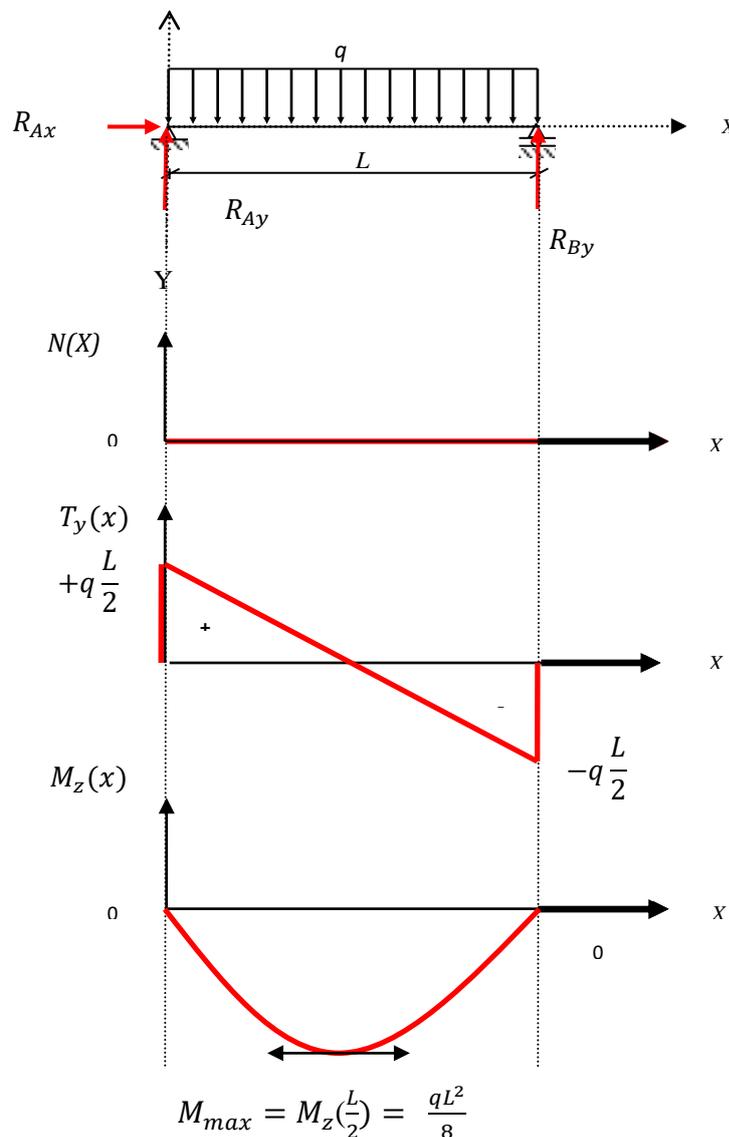
Cette expression est valide pour $0 \leq x \leq L$

- Pour $x = 0 \rightarrow M_z(0) = R_{Ay} \cdot 0 - q \cdot \frac{0}{2} = 0$

- Pour $x = L \rightarrow M_z(L) = R_{Ay} \cdot L - q \cdot \frac{L^2}{2} = 0$

Moment maximum au milieu de la poutre $x = \frac{L}{2}$ est $M_{max} = M_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{2} - q \cdot \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} = \frac{qL^2}{8}$.

Le diagramme du moment de flexion est parabolique, atteignant son maximum au centre de la poutre.



3. Contrainte de flexion maximale

La contrainte de flexion maximale dans une section rectangulaire est donnée par la formule :

$$\sigma_{max} = \frac{M_z^{max} \cdot y_{max}}{I_z}$$

y_{max} : distance de la fibre neutre à la fibre extrême).

$I_z = \frac{bh^3}{12}$ est le moment d'inertie de la section rectangulaire.

$$\sigma_{max}^{+ \text{ traction}} = \sigma_{max}^{- \text{ compression}} \quad \sigma_{max} = \frac{\left(\frac{ql^2}{8}\right) \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{ql^2}{h^2 b}$$

4. Contrainte tangentielle maximale

Cette contrainte est due à l'effort tranchant agissant sur la poutre. La contrainte tangentielle à une distance y de la fibre neutre dans une section rectangulaire est donnée par la formule suivante:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S_t}{b \cdot I_z}$$

$T_{max} = \frac{ql}{2}$ est l'effort tranchant de la poutre.

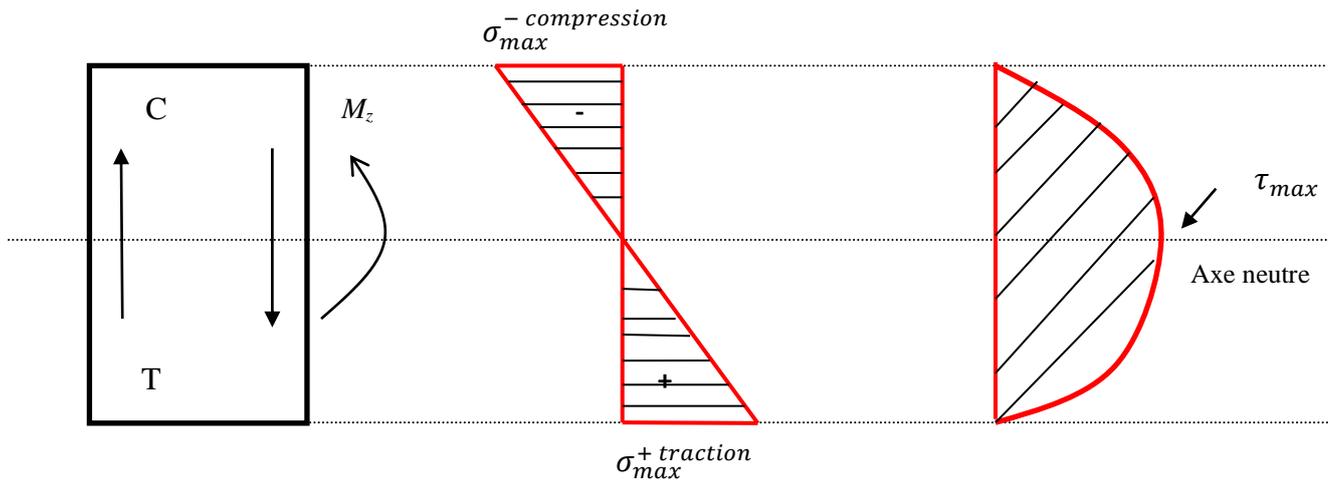
S_t est le moment statique de la partie de la section au-dessus (ou en dessous) de la fibre où la contrainte est calculée, par rapport à la fibre neutre. Le moment statique d'une section par rapport à un axe est égal au produit de l'aire de la section par la distance entre son centre de gravité et l'axe.

b est la largeur de la section rectangulaire.

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{8}\right)}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_{max}}{b \cdot h} = \frac{3ql}{4bh}$$

5- Tracé des diagrammes des contraintes normales et tangentielles

Le tracé des diagrammes des contraintes normales et tangentielles d'une section rectangulaire permet de visualiser la distribution des contraintes internes le long de la poutre. Les contraintes normales, résultant du moment de flexion, sont maximales aux fibres extérieures de la section et nulles à la fibre neutre. En revanche, les contraintes tangentielles, dues à l'effort tranchant, sont maximales à la fibre neutre et diminuent jusqu'à être nulles aux bords supérieur et inférieur de la section. Ces diagrammes sont essentiels pour analyser la sécurité et le comportement mécanique de la poutre sous charge.



6. Déformée et flèche de la poutre

Pour déterminer la déformée (ou la courbure) et la flèche d'une poutre de longueur L soumise à un chargement uniformément réparti q , on peut utiliser les équations de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Voici les étapes générales pour résoudre ce problème :

$$E I V'' = -M_z$$

où :

- $V(x)$ est la déformée de la poutre (déplacement vertical en fonction de la position x).
- $M(x)$ est le moment fléchissant à la position x .
- E est le module d'élasticité du matériau.
- I est le moment d'inertie de la section transversale de la poutre.

Pour une poutre de longueur L avec une charge uniformément répartie q , le moment fléchissant $M(x)$ en un point x est donné par :

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2} \cdot x$$

En intégrant deux fois l'équation de la courbure, on obtient:

Première intégration:

$$E I V' = EI \frac{\partial V}{\partial x} = EI \theta(x) = \frac{qx^3}{6} - \frac{qL}{4} \cdot x^2 + C_1$$

Deuxième intégration:

$$E I V = \frac{q}{24} \cdot x^4 - \frac{qLx^3}{12} C_1 \cdot x + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration déterminées par les conditions aux limites.

Pour une poutre simplement appuyée aux extrémités $x = 0$ et $x = L$

- $V(0) = 0$ et $V(L) = 0$ (pas de déplacement vertical aux appuis).

On résout ces conditions pour obtenir les deux constantes C_1 et C_2

$$V(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$V(L) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24}$$

Ainsi, l'équation de la rotation devient :

$$\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qLx^2}{4EI} + \frac{qL^3}{24EI}$$

L'équation de la déformée devient :

$$V(x) = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qLx^3}{12EI} + \frac{qL^3}{24EI}$$

7. Expressions maximales de la flèche et de l'angle de rotation

La rotation maximale se produit généralement à une distance de $x=0$. pour une poutre uniformément chargée. Substituons $x=0$ dans l'expression de $\theta(x)$ pour obtenir :

$$\theta_{max}(x) = \theta(0) = \frac{qL^3}{24EI}$$

La flèche maximale V_{max} se produit au milieu de la poutre $x = \frac{L}{2}$. En substituant $x = \frac{L}{2}$ dans l'équation de $V(x)$, on obtient :

$$V_{max}(x) = V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Tableau 6.4 : Récapitulatif des résultats

La flèche maximale	$V_{max}(x) = V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$
La rotation maximale	$\theta_{max}(x) = \theta(0) = \frac{qL^3}{24EI}$

Chapitre 5

Le Cisaillement

Chapitre 5 : Cisaillement

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons étudié les contraintes tangentielles induites par l'effort de traction simple. Ces contraintes, qui tendent à cisailer la section, provoquent des déformations angulaires. En effet, sous l'effet d'une force de traction, le matériau est soumis à une distribution de contraintes qui génère des efforts de cisaillement interne. Ces efforts de cisaillement se manifestent par une déformation angulaire des éléments de la section, entraînant une distorsion de la forme initiale.

Il est essentiel de comprendre que ces déformations angulaires, bien que souvent moins visibles que les allongements longitudinaux, peuvent avoir des conséquences significatives sur l'intégrité structurelle, notamment en ce qui concerne la stabilité et la résistance à long terme. Une analyse rigoureuse de ces contraintes tangentielles permet de prévenir des défaillances potentielles dues à des phénomènes de cisaillement excessif, en particulier dans les matériaux ductiles ou dans les éléments soumis à des forces de traction importantes.

5.2 Définitions

Une poutre est soumise à une sollicitation de cisaillement simple lorsque deux systèmes de forces opposées agissent dans un plan (P) perpendiculaire à sa ligne moyenne. Ces forces, de même intensité mais de sens contraires, tendent à faire glisser les sections transversales de la poutre l'une par rapport à l'autre, générant ainsi un effort de cisaillement

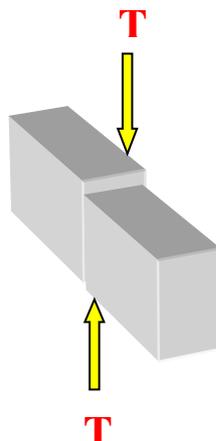


Figure 1.5 : Découpage d'un tube carré sous un effort de cisaillement

Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons S1 et S2 glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P) (figure 38.5).

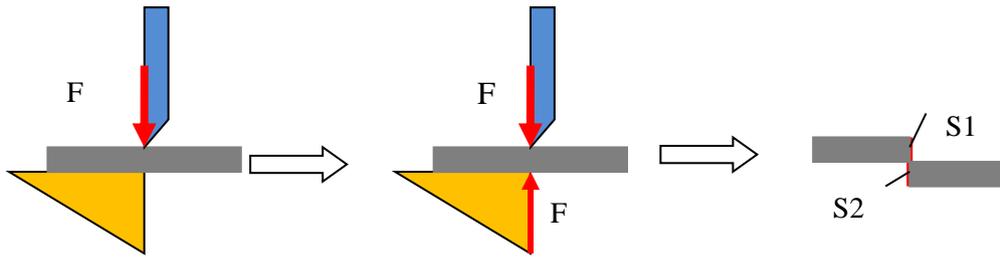


Figure 2.5 : Explication du phénomène de cisaillement

Torseur de cohésion dans (G; x ; y ; z) :

- Les forces de cohésion n'ont qu'une composante tangentielle (effort tranchant)

$$N=0, M_t=M_f y = M_f z=0 \text{ et } T_z=0 \left\{ T_{gcoh} \right\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2.1 Exemple de cisaillement

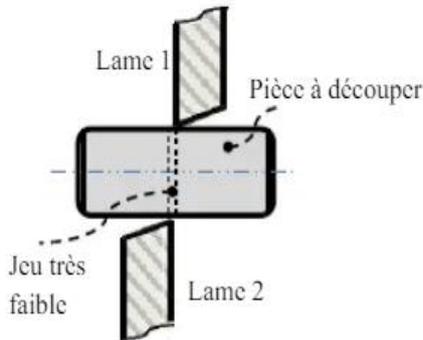


Figure 3.5.1 Cisaillement pure [16]

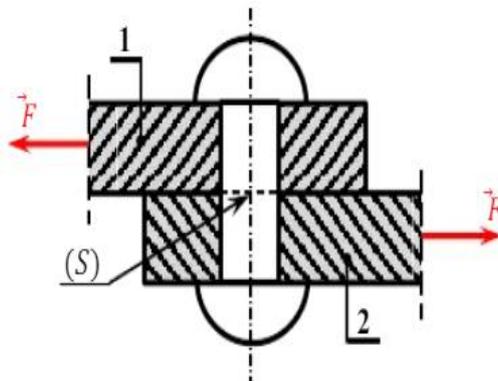


Figure 4.5.2 Rivetage [16]

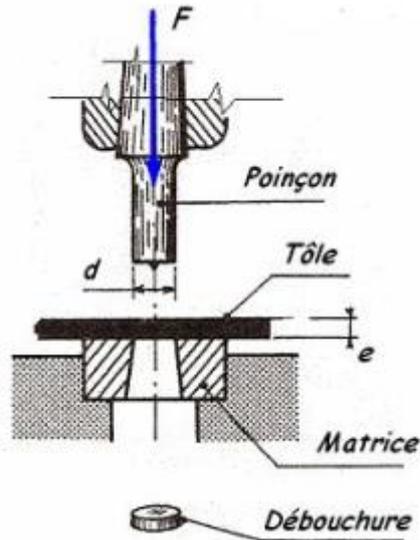


Figure 5.5.3 poinçonnage [16]

5.3 Contrainte de cisaillement

On considère que l'effort tranchant T est uniformément distribué sur la surface cisillée S . Ainsi, la contrainte de cisaillement moyenne τ peut être exprimée comme étant le rapport entre l'effort tranchant et la surface cisillée:

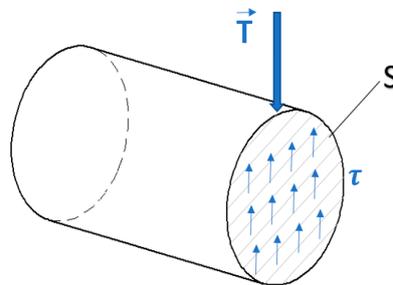


Figure 6.5 : Contraintes de cisaillement

La contrainte de cisaillement est donné par la relation :

$$\tau = \frac{T}{S} \quad (5.1)$$

Avec :

τ : contrainte tangentielle de cisaillement (MPa ou N/mm²).

T : effort tranchant (N).

S : section droite cisillée (S) (mm²).

5.4 Déformation élastique en cisaillement

L'essai de cisaillement consiste à appliquer à une éprouvette deux charges opposées, F et $-F$, situées à une distance Δx l'une de l'autre. Cette configuration provoque une déformation de l'éprouvette, comme illustré sur la Figure 40.5. Lorsque la charge F est augmentée, on mesure la variation du déplacement Δy de l'éprouvette.

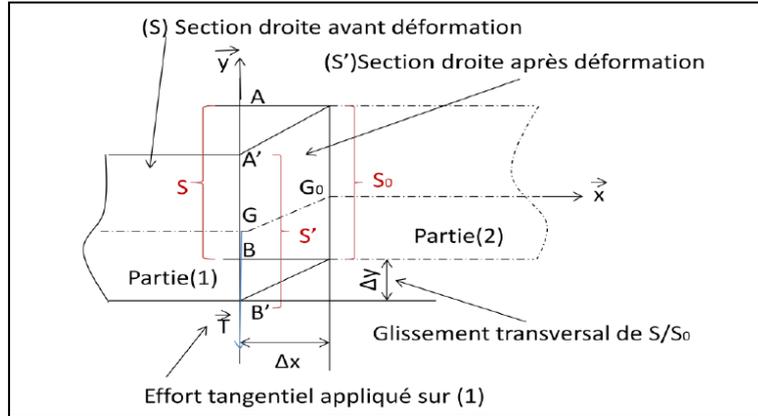


Figure 7.5 Déformation élastique en cisaillement [21]

$\text{tg } \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ si γ est petit donc $\text{tg } \gamma = \gamma$, on obtient alors : $\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Si on note γ par l'angle de cisaillement, γ s'appelle "distorsion" ou "déformation de cisaillement".

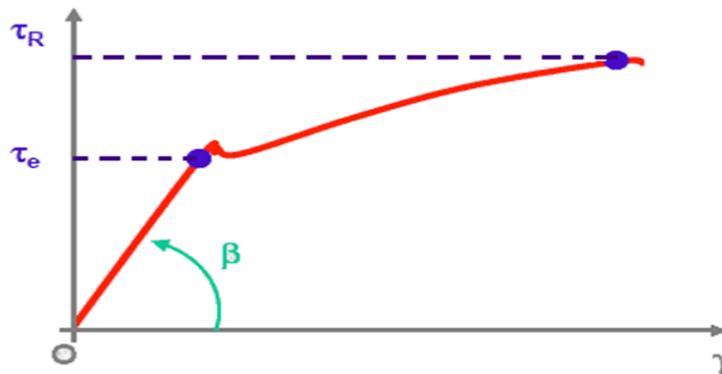


Figure 8. 5 : courbe contrainte –déformation [21]

Lorsque les déformations restent dans le domaine élastique, la contrainte de cisaillement τ est directement proportionnelle à l'angle de glissement γ . La relation entre ces deux quantités est donnée par la loi de Hooke en cisaillement, qui s'exprime ainsi :

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{5.2}$$

τ : contrainte tangentielle (en MPa)

G : module d'élasticité transversal (ou module de cisaillement ou de Coulomb) qui est exprimé en MPa.

γ : angle de glissement (en rd)

Comme E , G est une caractéristique du matériau, déterminée expérimentalement. Il existe une relation entre G , E et ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.3)$$

5.5 Condition de résistance au cisaillement

Pour garantir la sécurité, la contrainte tangentielle τ doit être inférieure à une valeur limite connue sous le nom de résistance pratique au glissement, notée R_{pg} .

$$\tau_{adm} = R_{pg} = \frac{\tau_e}{s} \quad (5.4)$$

τ_e : La limite élastique au cisaillement

S : est un coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon les domaines d'application.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

La condition de résistance au cisaillement exprime le principe fondamental selon lequel la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil critique établi. En d'autres termes, pour assurer la sécurité de la structure, la contrainte de cisaillement τ doit rester inférieure ou égale à la résistance pratique au glissement R_{pg} .

$$\tau_{max} \leq \tau_{adm}$$

Pour vérifier le cisaillement d'une poutre il faut commencer tout d'abord par calculer

τ_{max} = la contrainte normale maximale de cisaillement, et comparer le résultat avec

τ_{adm} = la contrainte normale admissible de cisaillement.

- Formule de τ_{max} : dépend de la nature de la section

Tableau 7.5 : Expression de la contrainte tangentielle maximale de certaines sections [25]

La section	τ_{max}
Carrée	$\tau = \frac{3T_{max}}{2S}$
Rectangulaire	$\tau = \frac{3T_{max}}{2S}$
Circulaire	$\tau = \frac{4T_{max}}{3S}$

T_{max} : L'effort tranchant maximale déduit à partir du diagramme de T.

S : aire de la section droite (surface).

La résistance pratique au glissement R_{pg} est une valeur limite déterminée expérimentalement ou par des normes de conception, qui représente la capacité maximale de matériau à supporter des contraintes de cisaillement sans subir de défaillance ou de rupture. Si la contrainte réelle dépasse cette valeur limite, le matériau pourrait se déformer de manière excessive, se fissurer ou se rompre, ce qui compromettrait la sécurité et la stabilité de la structure. Cette condition de résistance est essentielle pour prévenir les défaillances structurelles et garantir la durabilité et la fiabilité des éléments soumis à des forces de cisaillement.

5.6 Exercices

5.6.1 Exercice 1 :

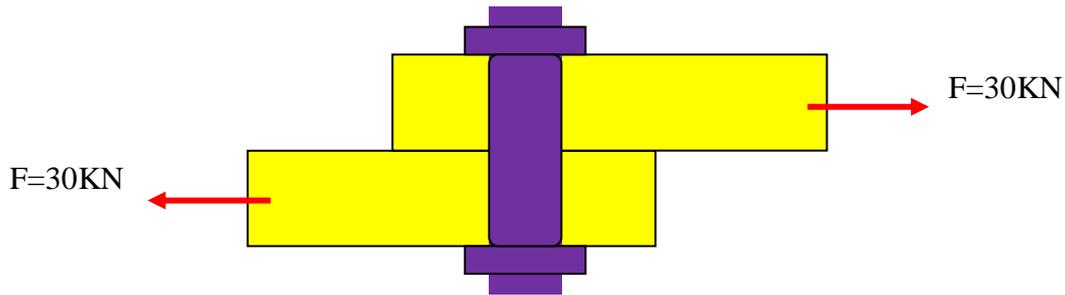
Deux pièces en acier sont assemblées à l'aide de deux rivets, chacun ayant un diamètre $D = 30\text{mm}$ comme illustré dans la Figure 1. Le module de rigidité en cisaillement est ($G = 0.3 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^3$).

1- Calculer la contrainte tangentielle de cisaillement τ :

Pour ce calcul, supposons que la charge totale appliquée est F, et qu'elle est uniformément répartie entre les deux rivets. Trouvez la contrainte tangentielle de cisaillement dans chaque rivet.

2- Calculer l'angle de glissement γ :

En utilisant la loi de Hooke pour le cisaillement, calculez l'angle de glissement pour chaque rivet en fonction de la contrainte tangentielle obtenue.

**La solution :**

Calcul la contrainte tangentielle de cisaillement τ

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{S}$$

$$T = F = 30\text{KN} = 30 \cdot 10^3 \text{ Kg}$$

$$S = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 7.065 \text{ cm}^2$$

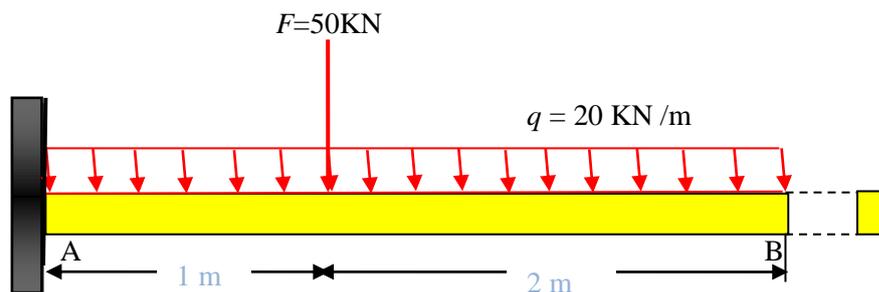
$$\tau = \frac{30 \cdot 10^3}{7.065} = 424.628 \text{ kg/cm}^2$$

2-Calculer l'angle de glissement γ

$$\tau = G \cdot \gamma \rightarrow \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{424.628}{0.3 \cdot 10^6} = 0.00141 \text{ rad}$$

5.6.2 Exercice 2 :

Considérons une poutre encastrée, en béton de construction, ayant une section droite rectangulaire pleine de dimensions 50 cm \times 40 cm. Cette poutre est soumise à une charge transverse entraînant un effort tranchant T que l'on doit déterminer. L'objectif est de calculer les contraintes de cisaillement maximales dans la section transversale de la poutre. On fait l'hypothèse que le poids propre de la poutre est négligeable par rapport aux autres charges appliquées. On donne : $\tau_{\text{adm}} = 3 \text{ MPa}$



Solution:

Pour calculer les contraintes de cisaillement maximales, il faut d'abord connaître l'effort tranchant T dans la poutre. Cet effort est généralement donné ou peut être déterminé à partir des charges appliquées. Puisque le problème ne donne pas de charge spécifique, on suppose ici que T est un paramètre connu ou calculé à partir d'un diagramme des efforts tranchants.

$$\sum F_{/x} = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_{/y} = 0 \rightarrow R_{Ay} = 50 + 20 * 3 = 110 \text{ KN} \rightarrow R_{Ay} = 110 \text{ KN}$$

$$\sum M_{/A} = 0 \rightarrow -M_A + 50 + 20 * 3 * 1,5 = 0 \rightarrow M_A = 140 \text{ KN.m}$$

L'effort tranchant est maximal à l'encastrement, ce qui en fait une zone critique pour l'analyse des contraintes dans une poutre en console.

La contrainte maximale dans une section rectangulaire se détermine en utilisant la formule suivante :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_{max}}{S} = \frac{3 * 110 * 10^3}{2 * 400 * 500} = 0,825 \text{ MPa}$$

On a: $\tau_{max} = 0.825 \text{ MPa}$

$\tau_{max} \leq \tau_{adm} \rightarrow 0.825 \leq 3 \text{ MPa}$, donc la section est vérifiée vis à vis du cisaillement

Chapitre 6

La Torsion

Chapitre 6 : Torsion

6.Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les concepts essentiels de la torsion, y compris la distribution des contraintes et des déformations dans les sections circulaires et non circulaires, les formules pour calculer les contraintes de cisaillement dues à la torsion, et l'importance du module de rigidité. L'étude de la torsion est cruciale pour garantir la sécurité et l'efficacité des structures soumises à ce type de sollicitation, en permettant de concevoir des éléments capables de résister aux charges de torsion sans défaillance.

6.1 Définitions

En résistance des matériaux (RDM), le phénomène de la torsion se réfère à la déformation d'un élément structural lorsqu'un moment de torsion, ou couple, est appliqué autour de son axe longitudinal. Cette sollicitation provoque une rotation relative des sections transversales de l'élément, entraînant des contraintes de cisaillement internes.

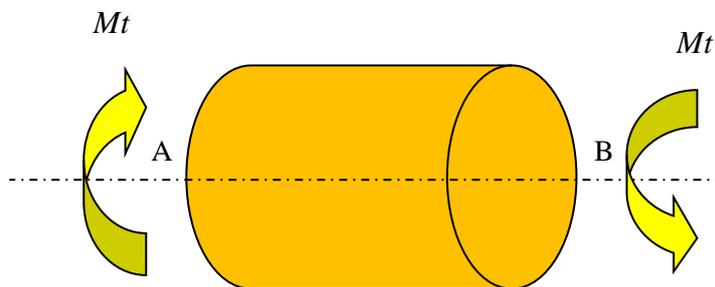


Figure 1.6 : Poutre est sollicitée à la torsion simple

La poutre est supposée avoir une section circulaire constante et un poids négligeable. Le torseur des efforts de cohésion à la section droite S , de centre de surface G , est défini par :

$$\{Tcoh\}_G = \begin{bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple : Tige de tournevis.

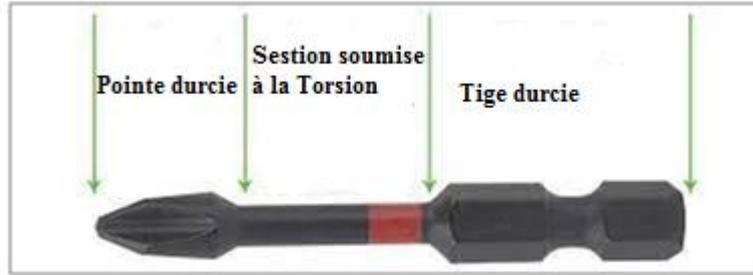


Figure 2.6 Tige de tournevis [11]

6.2 Contrainte tangentielle ou de glissement

6.2.1 L'angle unitaire de torsion

L'angle unitaire de torsion θ est une mesure de la déformation angulaire relative entre deux sections d'une poutre ou d'un élément structural séparées par une distance longitudinale x . Il est défini comme l'angle entre les lignes qui étaient initialement parallèles dans les deux sections, divisé par la distance x entre ces sections :

$$\theta = \frac{\alpha_x}{x} = \frac{\alpha}{l} \quad \text{Unité : rad / mm} \quad (6.1)$$

La relation entre le moment de torsion et l'angle unitaire de torsion :

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0} \quad (6.2)$$

Avec :

θ : L'angle unitaire de torsion en radians par millimètre (rad/mm)

G : est le module de Coulomb, ou module de rigidité au cisaillement, en mégapascals (MPa)

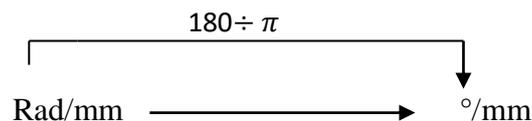
α_x : Angle de rotation de la section S_x en (rad)

X : Distance séparant la section S_x de la section de référence S_0 en millimètres (mm).

α : L'angle de rotation de la section (s) en rad

l : distance qui sépare s à la section de référence S_0 en (mm)

Exemple :



$$0.03 \text{ rad/mm} = 0.03 \times \frac{180}{\pi} \text{ °/mm}$$

$$2 \text{ °/mm} = \frac{2 \times \pi}{180} \text{ rad /mm}$$

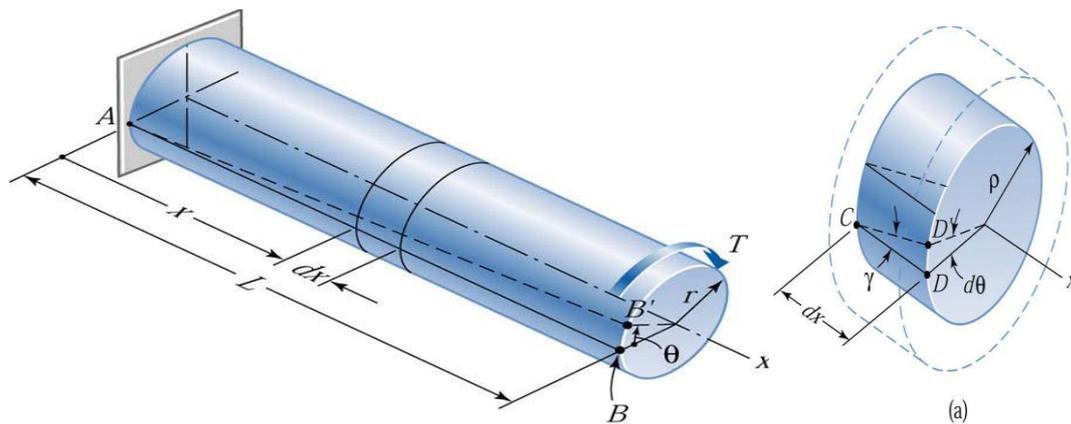


Figure 3.6 : Angle de torsion [10]

6.3 Contrainte tangentielle

La contrainte tangentielle τ dans un élément soumis à un moment de torsion peut être déterminée à partir des relations suivantes :

D'après la loi de Hooke pour les matériaux en déformation élastique, la contrainte tangentielle est reliée à la déformation angulaire γ par :

$$\tau = G \cdot \gamma \quad \text{et} \quad \gamma = \rho \frac{\alpha}{l}$$

$$\text{Donc on peut écrire :} \quad \tau = G \cdot \rho \cdot \theta \quad (6.3)$$

Avec :

γ : glissement relatif (Angle rad –sans unité)

Les contraintes normales s sont négligeables dans le cas des petites déformations en torsion. Les contraintes dans la coupure (S) se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ . A partir de la relation suivante :

$$\tau = \frac{M_t}{I_o} \cdot \rho \quad (6.4)$$

Avec :

τ : Contrainte tangentielle en MPa

M_t : Moment de torsion en N.mm

I_o : Moment quadratique polaire de la section (S) en mm^4

ρ : La distance entre le fibre neutre et la fibre considérée (mm)

6.3.1 Répartition des contraintes :

On montre que la contrainte τ , en un point M quelconque de la coupure (S) est proportionnelle à la distance $\rho = GM$, entre le point et la ligne moyenne.

La répartition des contraintes tangentielles τ au sein d'une coupure S d'un élément soumis à un moment de torsion est un aspect crucial de l'analyse de torsion. En torsion, les contraintes tangentielles sont réparties de manière linéaire par rapport à la distance radiale ρ du point considéré à l'axe neutre de torsion de la section.

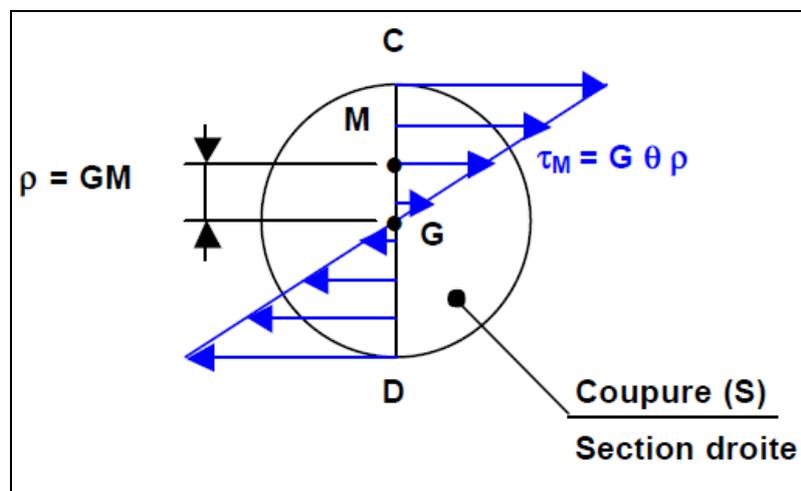


Figure 4.6 Répartition des contraintes [7]

La contrainte maximale se situe au point le plus éloigné de la fibre neutre.

Moment de torsion M_t

- Cas du puissance P et fréquence de rotation N donnés

$$P = c.W$$

$$W = \frac{2\pi N}{60} \quad \text{et} \quad C = \frac{P}{W} \quad \text{Donc} \quad M_t = C * 10^3$$

- Cas de la force F et la distance D donnés :

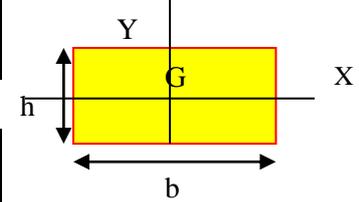
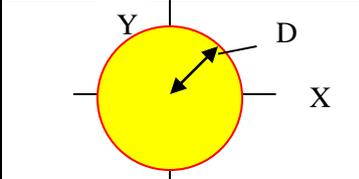
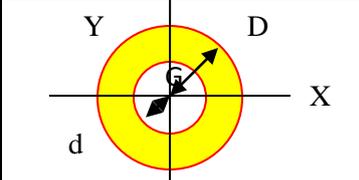
$$C = F * d \quad \text{et} \quad M_t = C * 10^3$$

La contrainte dans le cas de poutre circulaire

$$\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3} \quad (6.5)$$

Le moment quadratique polaire :

Tableau 8.6 : Expression du moment quadratique polaire de certaines sections [7]

		I_0
		$I_0 = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
		$I_0 = \frac{\pi D^4}{32}$
		$I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

6.3.2 Déformation élastique en torsion

A partir de la définition de θ et la loi de Hooke :

$$\tau = \frac{M_t}{I_0} \cdot r = G \cdot \rho \cdot \theta$$

On peut écrire :

$$\frac{\tau}{r} = \frac{M_t}{I_0} = G\theta = G \frac{d\theta}{dx}$$

Pour un arbre de longueur L, on déduit que la torsion totale est :

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0}$$

6.4 Condition de résistance à la torsion

Pour qu'un matériau reste dans son domaine élastique lorsqu'il est soumis à une torsion, il est essentiel que la contrainte tangentielle τ ne dépasse pas la limite élastique du matériau τ_e . La condition de résistance à la torsion peut être formulée comme suit :

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

Pour qu'une pièce sollicitée en torsion résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte tangentielle soit au plus égale à la résistance pratique au cisaillement R_{Pg} . s'étant un coefficient de sécurité, on écrit :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_o} \cdot \rho \leq R_{Pg}$$

$$R_{Pg} = \frac{R_{eg}}{S}$$

Avec :

R_{Pg} : Résistance pratique de glissement en N/mm^2

R_{eg} : Résistance élastique au glissement en N/mm^2

S : Le coefficient de sécurité

La contrainte maximal $\tau_{max} = K_t \times \tau$

K_t est le coefficient de concentration de contraintes.

6.5 Négligence des contraintes normales

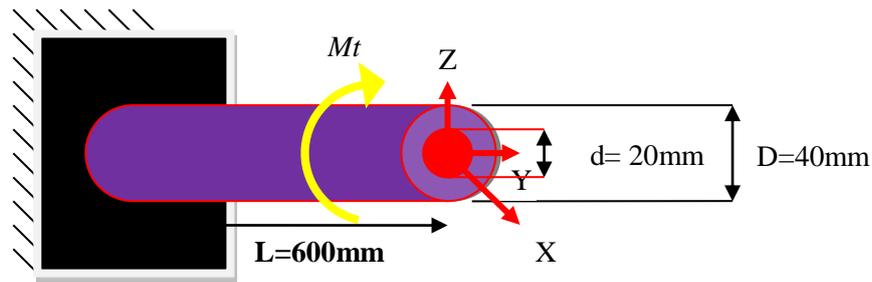
Dans le contexte des petites déformations en torsion, les contraintes normales, qui pourraient théoriquement être générées par la torsion, sont considérées comme négligeables par rapport aux contraintes de cisaillement. Cela est dû au fait que les contraintes normales résultant de la torsion sont souvent très faibles par rapport aux contraintes tangentielles générées, et leur contribution est donc souvent ignorée dans les analyses de torsion simplifiées.

6.6 Exercices

6.6.1 Exercice1 : Analyse de la Torsion dans un Arbre en Acier

Un arbre cylindrique en acier est soumis à un moment de torsion $M_t=1500 N \cdot mm$. L'acier a un module de cisaillement $G=75 GPa$

1. Déterminer la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} dans l'arbre.
2. Déterminer l'angle de torsion α à l'extrémité libre de l'arbre.



La solution :

$$M_t(x) + M_t = 0$$

$$M_t(x) = -M_t = -1500 \text{ N.m}$$

$$M_t(x) = -1500 \text{ N.m}$$

Pour la contrainte tangentielle de torsion Maximal τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} \cdot \rho_{max}$$

$$\rho_{max} = \frac{D}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ mm}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} (40^4 - 20^4) = 235500 \text{ mm}^2$$

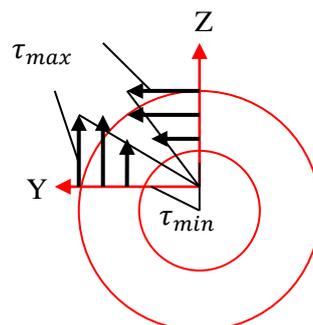
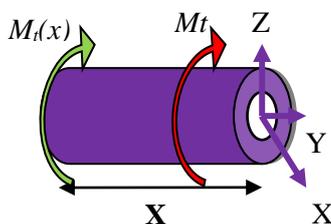
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} \cdot \rho_{max} = \frac{1500 \times 1000}{235500} \cdot 20 = 127.388 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = 127.388 \text{ MPa}$$

Pour la contrainte tangentielle de torsion τ_{min}

$$\tau_{min} = \frac{M_t}{I_0} \cdot \rho_{min} \text{ Ou } \tau_{min} = \tau_{max} \times \frac{d}{D}$$

$$\tau_{min} = 63.694 \text{ MPa}$$



L'angle de torsion

$$\theta = \frac{\alpha_x}{x} = \frac{\alpha}{l}$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_0}$$

$$\alpha = \frac{M_t L}{GI_0} = \frac{1500 \cdot 1000 \cdot 600}{75 \cdot 235500} = 0.51 \text{ rad} = 29.23^\circ$$

*Références
bibliographiques*

Références Bibliographiques

Cours en ligne (Lien Internet en date du 22/08/2024) :

[1] A. Flamant. " stabilité des constructions résistance des matériaux" Université Lille 1. Nombre de pages : 682. Année : 1897. Lien: <https://core.ac.uk/download/pdf/50563129.pdf>

[2] Bensaada M. "Polycopié de Résistance des Matériaux". Université de biskra . Nombre de pages : 92. Année : 2020. Lien : <https://www.univ-biskra.dz/enseignant/bensaada/RDM.pdf>

[3] Bourahla A. " Résistance des Matériaux de base". Université Sâad Dahleb de Blida Nombre de pages : 290. Année : 1998. Lien: <https://geniecivilpdf.com/download/cours-rdm-bourahla/>

[4] Damien André " Résistance Des Matériaux comportement mécanique" Ecole et Université de limoges. Nombre de pages : 74. Année : 2024.

Lien : https://www.unilim.fr/pages_perso/damien.andre/cours/meca/poly.pdf

[5] DAHEUR Elhadj Guesmia "Cours de la résistance des matériaux" Université de Ghardaïa . Nombre de pages : 56. Année : 2020. Lien: http://dspace.univ-ghardaia.dz:8080/jspui/bitstream/123456789/3107/1/Cours%20RDM%20r%C3%A9alis%C3%A9%20par%20Dr_%20DAHEUR-1.pdf

[6] FERDJANI Hicheme " Cours RDM-Élasticité" Université Sâad Dahleb de Blida Nombre de pages : 244. Année : 2022. Lien: <https://hal.science/hal-03580840/file/polycopie-rdm.pdf>

[7] LEBBAL Habib " Résistance des matériaux Cours et exercices corrigées" Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, Faculté de Génie Mécanique Département de Génie Mécanique. Nombre de pages : 109. Année : 2022. Lien : https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/RM_HL.pdf

[8] NAOUAL DJAFOUR NÉE BENKELFAT " Résistance Des Matériaux 1 (Cours de L2 Génie Civil)" UNIVERSITÉ ABOUBEKR BELKAID DE TLEMCEN. Nombre de pages : 124. Année : 2022. Lien: https://elearn.univ-tlemcen.dz/pluginfile.php/105978/mod_resource/content/1/COURS%20RDM%20L2/Cours%20RDM%201.pdf

[9] William A. Nash " Résistance des matériaux – Cours et problèmes" SERIE SHAUM. Nombre de pages : 151. Année : 1974. Lien: https://drive.google.com/file/d/1cKN1-huB-ZVEFZFk4pHiMsvyo_78bMh2/view.

[10] Zamila HARICHANE "Polycopié de Résistance des Matériaux" Université Hassiba Benbouali de Chlef, Faculté de Génie Civil et d'Architecture, Département de Génie Civil. Nombre de pages : 122. Année : 2015.

Lien : <https://www.univ-chlef.dz/FGCA/wp-content/uploads/2021/05/Polycopi%C3%A9-RDL-L2.pdf>

Ouvrages pédagogique

[11] Aleinik L. et Durler J. RESISTANCE DES MATERIAUX cours de base, Edition Bibliothèque de l'ingénieur 1973.

[12] André Bazergui, Tang Bui-Quoc, André Biron, Georges McIntyre et Charles Laberge : Résistance des matériaux. Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 3 édition, 2002. '

[13] André Bazergui, Tang Bui-Quoc, André Biron, Georges McIntyre et Charles Laberge : Résistance des matériaux. Recueil de problèmes, Tome 1. Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2003.

[14] André Bazergui, Tang Bui-Quoc, André Biron, Georges McIntyre et Charles Laberge : Résistance des matériaux. Recueil de problèmes, Tome 2. Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2003.

[15] Armand Giet et Lucien Geminard : Résistance des matériaux, Tome 1. Dunod, 5 édition, 1968.

[16] Armand Giet et Lucien Geminard : Résistance des matériaux, Tome 2. Dunod, 5 édition, 1968.

[17] Armand Giet et Lucien Geminard : Problèmes de résistance des matériaux, Tome 1. Sollicitations simples, sollicitations composées. Dunod, 1973.

[18] Armand Giet et Lucien Geminard : Problèmes de résistance des matériaux, Tome 2. Poutres. Dunod, 1973.

[19] Jean Courbon : Résistance des matériaux, Tome 1. Dunod, 2 édition, 1964.

[20] Jean Courbon : Résistance des matériaux, Tome 2. Dunod, 1965.

[21] Jean Courbon : Eléments de résistance des matériaux. Dunod, 1970.

[22] Maurice Albiges et André Coin : Résistance des matériaux appliquée (2 tomes). Eyrolles, 1976.

[23] Jean Goulet, Jean-Pierre Boutin, Frédéric Lerouge "Aide-mémoire - Résistance des matériaux" - 10e édition . Parution : octobre 2019. Collection : Aide-mémoire Marque : Dunod. 352 pages

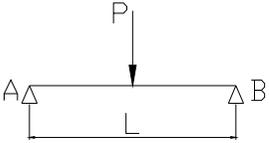
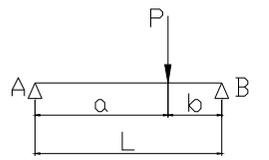
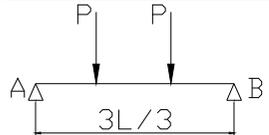
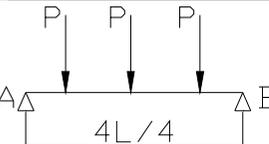
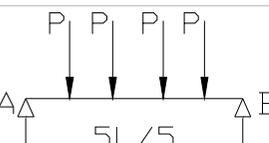
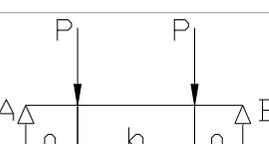
[24] S.P. Timoshenko. (1964) Résistance des matériaux Tome 1, Dunod. 420 pages

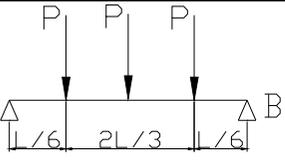
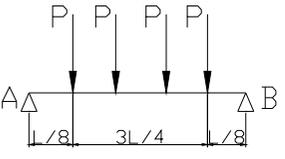
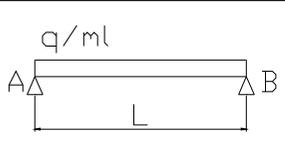
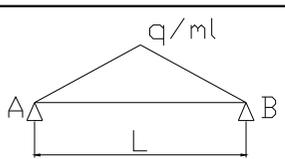
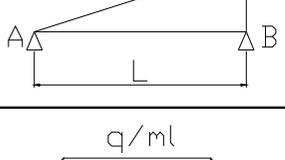
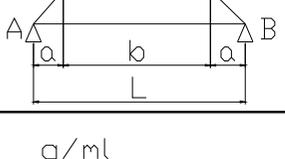
[25] S.P Timoshenko : Résistance des matériaux, Tome 2. Dunod, 2 édition, 1968. 404 Pages.

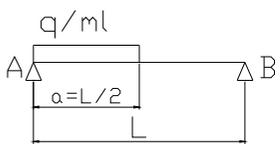
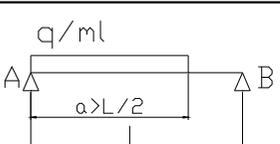
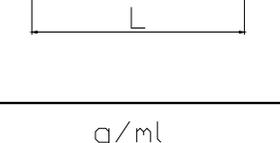
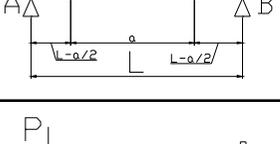
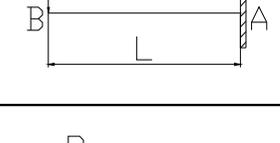
[26] Samia Bouzouaid : Cours de résistance des matériaux. Université Kasdi Merbah Ouargla Faculté des Sciences Appliquées Domaine de formation : sciences et Technologies . Nombre de pages : 106. Année : 2023.

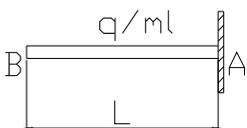
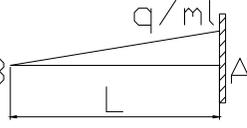
ANNEXES

FORMULAIRE DES POUTRES

Cas de charges	Réactions aux appuis	Moment maximum	flèche L en m H en mm σ en DaN/mm ²	Flèche à l/2	Rotation aux appuis
	$\frac{P}{2}$	$M_{L/2} = \frac{PL}{4}$	$0.79 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{PL^3}{48EI}$	$\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$ $\theta_B = +\frac{PL^2}{16EI}$
	$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$	$M_0 = M_a = \frac{Pab}{L}$ $M_{L/2} = \frac{Pb}{2}$ (a > b)		$f_{l/2} = \frac{-Pb}{48EI} (3L^2 - 4b^2)$ $f_a = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL}$ $f_{max} = \frac{-Pb}{27EIL} \sqrt{3(L^2 - b^2)^3}$	$\theta_A = \frac{Pb}{6EIL} (b^2 - L^2)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EIL} (L^2 - a^2)$
	P	$M_{L/2} = \frac{PL}{3}$	$1.01 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{23PL^3}{648EI}$	
	$\frac{3P}{2}$	$M_{L/2} = \frac{PL}{2}$	$0.84 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{19PL^3}{384EI}$	
	$2P$	$M_{L/2} = \frac{3PL}{5}$	$1.0 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{63PL^3}{1000EI}$	
	P	$M_{L/2} = Pa$	$\frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{24EI}$	

	$\frac{3P}{2}$	$M_{L/2} = \frac{5PL}{12}$	$0.94 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{53PL^3}{1296EI}$	
	$2P$	$M_{L/2} = \frac{PL}{2}$	$0.94 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{41PL^3}{768EI}$	
	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL^2}{8}$	$0.99 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_{A^-} = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta_{B^+} = +\frac{qL^3}{24EI}$
	$\frac{qL}{4}$	$\frac{qL^2}{12}$	$0.95 \frac{\sigma L^2}{h}$	$\frac{qL^4}{120EI}$	$\theta_{A^-} = -\frac{5qL^3}{192EI}$ $\theta_{B^+} = +\frac{5qL^3}{192EI}$
Cas de charges multiples			$\approx \frac{\sigma L^2}{h}$		
	$R_A = \frac{qL}{6}$ $R_B = \frac{qL}{3}$	$M_0 = \frac{qL^2\sqrt{3}}{27}$ $M_{L/2} = \frac{qL^2}{16}$		$f_{L/2} = -\frac{5qL^4}{768EI}$ $f_{\max} = -\frac{5qL^4}{765EI}$	$\theta_{A^-} = -\frac{7qL^3}{360EI}$ $\theta_{B^+} = +\frac{8qL^3}{360EI}$
	$R_A = \frac{q}{2}(a+b)$ $R_B = \frac{q}{2}(a+b)$	$M_0 = M_{L/2} = \frac{q}{24}(3L^2 - 4a^2)$		$f_{\max} = f_{L/2} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{a^2L^2}{48} + \frac{a^4}{120} - \frac{5L^4}{384} \right)$	$\theta_{A^+} = +\frac{q}{24EI} (2a^2L - a^3 - L^3)$ $\theta_{B^+} = +\frac{q}{24EI} (L^3 + a^3 - 2a^2L)$
	$R_A = \frac{qa}{L} \left(L - \frac{a}{2} \right)$	$M_x \Big _0^{L/2} = RAx - \frac{qx^2}{2}$		$f_{L/2} = -\frac{qa^2}{96EI} (2a^2 - 3L^2)$	

				$f_{L/2} = -\frac{5qL^4}{768EI}$	
	$R_B = \frac{qa^2}{2L}$	$M_x \Big _{L/2} = RAx - \frac{qa}{2} \left(x - \frac{a}{2}\right)$		$f_{L/2} = -\frac{q}{48EI} \left[\frac{L^4}{16} + \left(a(2L-a) - \frac{L^2}{4}\right)^2 \right]$	
	$R_A = -\frac{M}{L}$ $R_B = +\frac{M}{L}$	$M_0 = M_A = M$ $M_B = 0$		$f_{L/2} = -\frac{ML^2}{16EI}$ $f_{\max} = -\frac{ML^2}{15.58EI}$	$\theta_A = -\frac{ML}{3EI}$ $\theta_B = +\frac{ML}{6EI}$
	$R_A = -\frac{M}{L}$ $R_B = +\frac{M}{L}$	$M_{aw} = -\frac{Ma}{L}$ $M_{ae} = +\frac{Mb}{L}$		$f_a = +\frac{Mab}{3EIL}(a-b)$ $f_{L/2} = +\frac{M}{16EI}(4a^2 - L^2)$	$\theta_A = +\frac{M}{EI} \left(a - \frac{L}{3} - \frac{a^2}{2L} \right)$ $\theta_B = -\frac{M}{EI} \left(\frac{L}{6} - \frac{a^2}{2L} \right)$
	$R_A = R_B = \frac{Pa}{2}$	$M_m = +\frac{Pa}{8}(2L-a)$		$f_{L/2} = \frac{Pa}{384EI}(8L^3 - 4a^2L + a^3)$	
	$R_A = P$	$M_A = -PL$		$f_B = -\frac{PL^3}{3EI}$	$\theta_B = +\frac{PL^2}{2EI}$
	$R_A = P$	$M_A = -Pb$		$f_B = -\frac{Pb^3}{3EI}$ $f_C = -\frac{Pb^2}{6EI}(2L+a)$	$\theta_B = \theta_C = +\frac{Pb^2}{2EI}$

	$R_A = qL$	$M_A = -\frac{qL^2}{2}$		$f_B = -\frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_B = +\frac{qL^3}{6EI}$
	$R_A = \frac{qL}{2}$	$M_A = -\frac{qL^2}{6}$		$f_B = -\frac{qL^4}{30EI}$	$\theta_B = +\frac{qL^3}{34EI}$
	$R_A = 0$	$M_A = M$		$f_B = -\frac{ML^2}{2EI}$	$\theta_B = \frac{ML}{EI}$