Mathématiques I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

✠– Série numéro 1 : Logique et Raisonnement Mathématiques–✠

Exercice 1 :
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations

1) $(3 \;\; \textit{divise} \;\; 12) \wedge (\sqrt{a^2} = |a|)$;
2) $(26 \leq 3^2 + (-1)^2) \vee (2^3 = 9)$;
3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{x} \leq 1$;
4) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*; xy = 1$;
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x + 1 = y + 2$;
6) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}; x + y > 0$.

Exercice 2 :
Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrer que :
$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$
2. Donner la négation des propositions suivantes :
a. $P \Longrightarrow Q$.
b. $P \vee (Q \wedge R)$.

Exercice 3 :

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le raisonnement direct, montrer que :
$$(x^2 - xy - 2y^2 = 0) \Longrightarrow (x = 2y).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que :
$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$
3. Montrer par contraposition les deux propositions suivantes :
a. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$, montrer que : $\left(x \neq -\dfrac{1}{3} \text{ et } y \neq 7\right) \Longrightarrow (3xy - 21x + y + 3 \neq 10)$.
b. Soient a, b deux réels tel que $a \neq -3b$. Montrer que : $\left(a \neq -\dfrac{14b}{3}\right) \Longrightarrow \left(\dfrac{2a+b}{a+3b} \neq 5\right)$.
4. On considère la proposition
$$R : \left(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x \in \mathbb{Q}\right).$$
a. Donner la négation de R.
b. Déduire, par le raisonnement par un contre exemple, que R est fausse.

Exercice 4 : En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ divisible par 17.

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

✠– Série numéro 2 : Ensembles, Relations et Applications–✠

Exercice 5 :

1. Soient A, B et C trois paries d'un ensemble E. Montrer que :
   a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   b. $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$.
   c. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
2. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2 / i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E^2 / i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2 / i > j\}$.
   a. Représenter A, B et C par un dessin.
   b. Montrer que A, B et C forment une partition de E^2.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ comme suit :
$\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est divisible par 3.
1. Dessiner le graphe représentant $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est-elle reflexive ?
3. $\mathcal{R}$ est-elle Symétrique ? antisymétrique ?
4. Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

Exercice 7 : Soit $\mathcal{T}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs comme suit :
$\forall x, y \in \mathbb{Z}\,;\, x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 4y = 5k$.
1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Déterminer la classe d'équivalence de a. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{T}$.

Exercice 8 : On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation binaire S par :
$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $xSy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = x^k$.
1. Montrer que S est une relation d'ordre.
2. S est-elle d'ordre total ?

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
1. Calculer $f(2)$ et $f(\frac{1}{2})$. f est-elle injective ?
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) - 2 = 0$. f est-elle surjective ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$. (*Indication : utiliser* $(x + 1)^2 \geq 0$ *et* $(x - 1)^2 \geq 0$).

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
1. Calculer $f^{-1}(-6)$ et $f^{-1}(0)$.
2. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
3. Donner des intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit bijective
4. Déterminer l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$.

Mathématiques I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

✠– Série numéro 3 : Fonctions Réelles à une Variable Réelle–✠

Exercice 11 : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-2}$ **2)** $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$ **3)** $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x-\sqrt{x^2-1}$.

Exercice 12 : Soit les deux fonction suivantes :

$f(x) = \begin{cases} 1-\frac{\sin(2x)}{x} & si \ \ x \neq 0 \\ \lambda & si \ \ x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & si \ \ x \leq 1 \\ -x+2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$

1. Déterminer λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$
3. Étudier la dérivabilité de g sur son domaine de définition.

Exercice 13 : Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x})$

1- Montrer qu'il existe une fonction $\tilde{g}$ prolongeant g par continuité sur $\mathbb{R}$?

2- Écrire la nouvelle fonction $\tilde{g}$.

Exercice 14 :

1. Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction suivante : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1, 1]$?
2. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall n > 0 : \quad \frac{1}{1+n} < ln(n+1) - ln(n) < \frac{1}{n}.$$

Exercice 15 : En utilisant la règle de l'hôpital, calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\longrightarrow-1} \dfrac{x^3+5x+6}{x^3+1}$ **2)** $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x^2+5}{e^x+1}$ **3)** $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{ln(x)+x}{x^2}$.

Exercice 16 : Soit la fonction f définit par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan x.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Simplifier la formule de f.

Mathématiques I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

✠– Corrigé de la série n°1–✠

Corrigé 1 :

1. Vraie. Sa négation est :
$$(3 \text{ ne divise pas } 12) \vee (\sqrt{a^2} \neq |a|).$$
2. Fausse. Sa négation est :
$$(26 > 32 + (-1)^2) \wedge (2^3 \neq 9).$$
3. Fausse. Sa négation est :
$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} > 1.$$
4. Vraie. Sa négation est :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*; xy \neq 1.$$
5. Vraie. Sa négation est :
$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; x + 1 \neq y + 2.$$
6. Fausse. Sa négation est :
$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}; x + y \leq 0.$$

Corrigé 2 : Soient P, Q et R trois propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que $(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \implies Q$	$\overline{Q} \implies \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On remarque que $P \implies Q$ et $\overline{Q} \implies \overline{P}$ ont les mêmes valeurs de vérité, donc elles sont équivalentes.

2. Donnons la négation des propositions suivantes :

a. $(P \implies Q)$. On a $(P \implies Q) \iff (\overline{P} \vee Q)$. Donc
$\overline{P \implies Q} \iff \overline{\overline{P} \vee Q} \iff (\overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q}) \iff (P \wedge \overline{Q})$.

b. $P \vee (Q \wedge R)$. On a $\overline{P \vee (Q \wedge R)} \iff \overline{P} \wedge \overline{(Q \wedge R)} \iff \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R})$

Corrigé 3 :

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons, en utilisant le raisonnement direct, que :
$$(x^2 - xy - 2y^2 = 0) \implies (x = 2y).$$

On suppose que $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ est vraie. Est-ce également vrai pour $x = 2y$? Développons :
$$x^2 - xy - 2y^2 = x^2 + xy - xy - xy - 2y^2 = 0,$$
$$= x^2 + xy - 2xy - 2y^2 = 0,$$
$$= x(x - 2y) + y(x - 2y) = 0,$$
$$= (x - 2y)(x + y) = 0.$$

Cela implique $x - 2y = 0$ ou $x + y = 0$. Mais $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, donc $x = 2y$ est vrai.

2. Raisonnement par l'absurde : Supposons que
$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} > 1.$$
Développons :
$$\frac{6n+3}{(n+2)^2} - 1 > 0 \iff \frac{-n^2+2n-1}{(n+2)^2} > 0.$$
Cela implique $(-n^2+2n-1 = -(n-1)^2) > 0$, ce qui est une contradiction. Donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{6n+3}{(n+2)^2} \leq 1.$$

3.

a. En raisonnant par contraposition, montrons que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\left(x \neq -\frac{1}{3} \text{ et } y \neq 7\right) \implies (3xy - 21x + y + 3 \neq 10).$$
Cela revient à montrer que :
$$(3xy - 21x + y + 3 = 10) \implies \left(x = -\frac{1}{3} \text{ ou } y = 7\right).$$
Supposons que $3xy - 21x + y + 3 = 10$. Développons :
$$3xy - 21x + y + 3 = 10 \implies 3xy - 21x + y - 7 = 0,$$
$$\implies 3x(y-7) + (y-7) = 0,$$
$$\implies (y-7)(3x+1) = 0,$$
$$\implies y = 7 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}.$$
Ainsi, le résultat est démontré.

b. En raisonnant par contraposition, montrons que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq -3b$,
$$\left(a \neq -\frac{14b}{3}\right) \implies \left(\frac{2a+b}{a+3b} \neq 5\right).$$
Cela revient à montrer que :
$$\left(\frac{2a+b}{a+3b} = 5\right) \implies \left(a = -\frac{14b}{3}\right).$$
Supposons que :
$$\frac{2a+b}{a+3b} = 5.$$
Développons :
$$2a + b = 5(a+3b) \implies 2a + b = 5a + 15b,$$
$$\implies -3a = 14b \implies a = -\frac{14b}{3}.$$

4.

a. Considérons la proposition :
$$R : \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{Q}).$$
Donnons la négation de R :
$$\overline{R} : \exists x \in \mathbb{R},\ (x^2 \in \mathbb{Q} \text{ et } x \notin \mathbb{Q}).$$

b. Prenons $x = \sqrt{2}$. On a $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi, la proposition R est fausse.

Corrigé 4 :

1. Montrons, par récurrence, que : $(P_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.
   Étape 1 (Initialisation) : Pour $(n=1)$, $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2(1) - 1 = 1 = 1^2$.
   Étape 2 (Hérédité) : Supposons que (P_n) est vraie, c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Montrons que (P_{n+1}) est vraie : $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
   Étape 3 (Conclusion) : La propriété est vraie au rang $(n=1)$ et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $(n \in \mathbb{N})$.

2.
$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N},\ 3 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} \text{ est divisible par 17.}$$

Il s'agit de montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ 3 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} = 17k.$$

Étape 1 (Initialisation) : Pour $n = 1$, calculons :
$$3 \cdot 5^{2(1)-1} + 2 \cdot 3^{1-2} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 15 + 2 = 17.$$

On a donc $17 = 17 \cdot 1$. Ainsi, il existe $k = 1 \in \mathbb{N}$ tel que $3 \cdot 5^{2(1)-1} + 2 \cdot 3^{1-2} = 17k$. Donc $P(1)$ est vraie.
—
Étape 2 (Hérédité) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire :
$$\exists k \in \mathbb{N},\ 3 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} = 17k.$$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire :
$$\exists k' \in \mathbb{N},\ 3 \cdot 5^{2(n+1)-1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-2} = 17k'.$$

Calculons $3 \cdot 5^{2(n+1)-1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-2}$:
$$3 \cdot 5^{2(n+1)-1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-2} = 3 \cdot 5^2 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-2}.$$
$$= 3 \cdot 25 \cdot 5^{2n-1} + 6 \cdot 3^{n-2}.$$

Développons :
$$= 3 \cdot (8 + 17) \cdot 5^{2n-1} + 6 \cdot 3^{n-2}.$$
$$= 8(3 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3^{n-2}) + 17 \cdot (3 \cdot 5^{2n-1}).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence $P(n)$, on sait que :
$$3 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} = 17k.$$

Substituons cela :
$$8(17k) + 17 \cdot (3 \cdot 5^{2n-1}).$$

Factorisons par 17 :
$$= 17 \cdot (8k + 3 \cdot 5^{2n-1}).$$

Posons $k' = 8k + 3 \cdot 5^{2n-1}$, qui est un entier naturel. Ainsi :
$$3 \cdot 5^{2(n+1)-1} + 2 \cdot 3^{(n+1)-2} = 17k',$$

ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie.
—
Étape 3 (Conclusion) : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \cdot 5^{2n-1} + 2 \cdot 3^{n-2}$ est divisible par 17.

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

Mathématiques I

✠– Corrigé de la série n°2–✠

Corrigé 5 :

1. Soient A, B et C trois paries d'un ensemble E.

   a. Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   Soit $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)$ et $(x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A)\ et\ (x \in B)$ ou $(x \in A)\ et\ (x \in C) \Leftrightarrow$ $(x \in A \cap B)$ ou $(x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   Comme $\forall\ x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C)$, alors
   $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.
   On peut utiliser la deuxième méthode suivante :

   1. Montrons que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   Soit $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow (x \in A)$ et $(x \in (B \cup C))$.
   Cas 1 : si $x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ avec $(A \cap C)$ un sous-ensemble quelconque dans E.
   Cas 2 : si $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ avec $(A \cap B)$ un sous-ensemble quelconque dans E.
   Donc dans les deux cas on a $\boxed{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

   2. Montrons que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$
   Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap B)$ ou $(x \in (A \cap C))$.
   Cas 1 : si $x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A)$ et $(x \in B) \Rightarrow x \in (B \cup C)$ avec C un sous-ensemble quelconque dans E.
   Donc $x \in (A \cap (B \cup C)$.
   Cas 2 : si $x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A)$ et $(x \in B) \Rightarrow x \in (B \cup C)$ avec B un sous-ensemble quelconque dans E.
   Donc $x \in (A \cap (B \cup C)$. Dans les deux cas on a $\boxed{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)}$.
   $\boxed{\text{1 et 2 montrent que } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

   b. Montrons que $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$.
   Soit $x \in C_E(A \cup B) \Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B \Leftrightarrow (x \in C_E(A))$ et $(x \in C_E(B)) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cap C_E(B)$.
   Comme $\forall x \in C_E(A \cup B) \Leftrightarrow x \in C_E(A) \cap C_E(B)$, alors $\boxed{C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)}$.

   c. Montrons que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
   Soit $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x \in (A \cup B))$ et $(y \in C) \Leftrightarrow (x \in A\ ou\ x \in B)$ et $(y \in C) \Leftrightarrow$ $(x \in A)$ et $(y \in C)$ ou $(x \in B)$ et $(y \in C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Comme $\forall (x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$, alors $\boxed{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)}$.

2. On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{(i, j) \in E^2 / i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E^2 / i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2 / i > j\}$.

a. Les ensembles A, B et C sont illustrés par la figure ci-dessous :

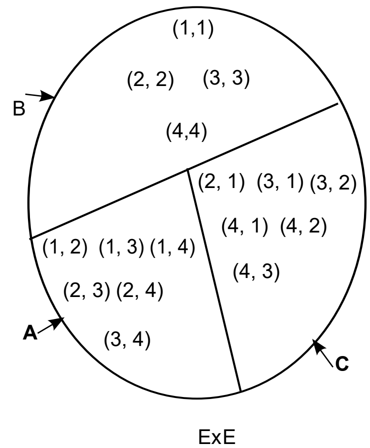
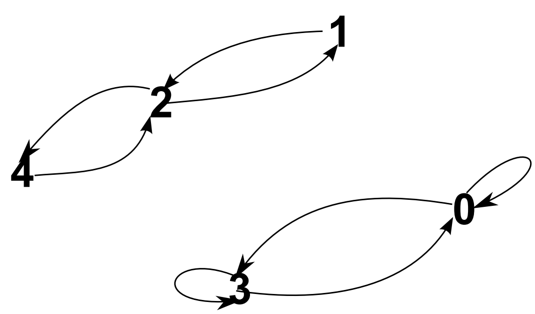


FIGURE 1 – Représentation des ensembles A, B et C par un dessin

a. Montrons que A, B et C forment une partition de E^2.
On a $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ et $(A \cup B \cup C) = E^2$, alors A, B et C forment une partition de E^2

Corrigé 6 : Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ comme suit :
$\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ est divisible par 3.
1. Le graphe de $\mathcal{R}$ est donné par la figure ci-dessous :



G={(0, 0),(0, 3),(1, 2),(2, 1),(2, 4),(3, 0),(3, 3),(4, 2)}

FIGURE 2 – Graphe de la relation $\mathcal{R}$

2. **Reflexivité** : Comme $\forall k \in \mathbb{Z}$ on a $2 + 2 \neq 3k$, alors 2 n'est pas en relation avec lui même. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas reflexive.
3. **Symétrie et antisymétrie** : Comme $\forall (x, y) \in E^2$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est une relation symétrique. Par contre elle ne peut pas être antisymétrique car on a $0\mathcal{R}3$ et $3\mathcal{R}0$, mais $0 \neq 3$.
4. **Tansitivité** : $\mathcal{R}$ n'est pas transitive car $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}4$, mais $1 \not\mathcal{R} 4$ (1 n'est pas en relation avec 4 car 1+4 = 5 n'est pas un multiple de 3).

Corrigé 7 : Soit $\mathcal{T}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs comme suit :
$\forall x, y \in \mathbb{Z}$; $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 4y = 5k$.
1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   - **Reflexivité** : Soit x un entier relatif, il est clair que $x + 4x = 5x$, alors pour $(k = x \in \mathbb{Z})$, on obtient $x + 4x = 5k$, donc $\mathcal{T}$ est reflexive.
   - **Symétrie** : Soient x, y deux entiers relatifs tels que $x\mathcal{T}y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 4y = 5k \Rightarrow x = 5k - 4y \Rightarrow 4x = 20k - 16y$ $\Rightarrow y + 4x = 20k - 15y = 5(4k - 3y)$. Pour $(k' = 4k - 3y) \in \mathbb{Z}$ on obtient $y + 4x = 5k'$, donc $\mathcal{T}$ est symétrique.
   - **Transitivité** : Soient x, y et z trois entiers relatifs tels que $x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z$, alors :

$$\begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z}, \quad x + 4y = 5k_1 \,; & \boxed{1} \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z}, \quad y + 4z = 5k_2. & \boxed{2} \end{cases}$$

$\boxed{1} + \boxed{2} \Rightarrow (x + 4y) +' y + 4z) = 5(k_1 + k_2) \Rightarrow x + 4z + 5y = 5(k_1 + k_2) \Rightarrow x + 4z = 5(k_1 + k_2 - y)$. Si on prend $((k_3 = (k_1 + k_2 - y)) \in \mathbb{Z}$ on obtient $x + 4z = 5k_3$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $\mathcal{T}$ est transitive.

Comme $\mathcal{T}$ est reflexive, symétrique et transitive, alors $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

2. Classe d'équivalence d'un element a dans $\mathbb{Z}$

Soit a un entier relatif, la classe d'équivalence de a, notée $Cl_{\mathcal{T}}(a)$, ou à ou ā, est donnée par ā=$\{x \in \mathbb{Z} : a\mathcal{T}x\} = \{x \in \mathbb{Z} : a + 4x = 5k, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \quad /a - x + 5x = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$=$\{x \in \mathbb{Z} \quad /a - x = 5(k - x), k \in \mathbb{Z}\}$ =$\{x \in \mathbb{Z} \quad /a - x = 5k', [k' = (k - x)] \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} \quad /a \equiv x[5]\}$. Donc l'ensemble quotient est donné par $\mathbb{Z}/\mathcal{T}$ =$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\ \}$. On peut aussi déterminer la classe d'équivalence d'un élément a dans $\mathbb{Z}$ comme suit : ā=$\{x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{T}a\} = \{x \in \mathbb{Z} : x + 4a = 5k, k \in \mathbb{Z}\} =$ $\{x \in \mathbb{Z} \quad /x - a + 5a = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$=$\{x \in \mathbb{Z} \quad /x - a = 5(k - a), k \in \mathbb{Z}\}$ =$\{x \in \mathbb{Z} \quad /x - a = 5k', [k' = (k - a)] \in \mathbb{Z}\}$ = $\{x \in \mathbb{Z} \quad /x \equiv a[5]\}$. Donc l'ensemble quotient est donné par $\mathbb{Z}/\mathcal{T}$ =$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\ \}$.

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= \{\ldots, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}\\
\bar{1} &= \{\ldots, -24, -19, -14, \ -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots\}\\
\bar{2} &= \{\ldots, -23, -18, -13, \ -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots\}\\
\bar{3} &= \{\ldots, -22, -17, -12, \ -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, \ldots\}\\
\bar{4} &= \{\ldots, -21, -16, -11, \ -6, -1, 4, 9, 14, 19, 24, 29, \ldots\}
\end{aligned}$$

Corrigé 8 : On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation binaire S par :
$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ xSy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = x^k$.

1. Montrons que S est une relation d'ordre.

• **Reflexivité** : Soir $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x = x^1 \Rightarrow \exists(k = 1) \in \mathbb{N} : x = x^k \Rightarrow xSx$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xSx$, d'où la reflixivité de S

• **Symétrie** : Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^* : xSy$ et ySx. On a $\begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N}, & y = x^{k_1}\ ; \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}, & x = y^{k_2}. \end{cases} \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = (y^{k_2})^{k_1} \Rightarrow$ $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : y = y^{k_1 k_2} \Rightarrow k_1 k_2 = 1$. Comme $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, alors $k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$ et par suite $x = y$.
Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ xSy$ et $ySx \Rightarrow x = y$. D'où l'antisymétrie de S.

• **Transitivité** : Soient $x, yetz \in \mathbb{R}_+^* : xSy$ et $ySz \Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N}, & y = x^{k_1}; \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}, & z = y^{k_2}. \end{cases} \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = (x^{k_1})^{k_2} \Rightarrow$ $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} : z = x^{k_1 k_2} \Rightarrow \exists k_3 = (k_1 k_2) \in \mathbb{N} : z = x^{k_3} \Rightarrow xSz$. Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*,\ xSy$ et $ySz \Rightarrow xSz$. D'où la transitivité de S.Comme S est reflexive, antisymétrique et transitive, alors S est une relation d'ordre.

2. L'ordre de S n'est pas total car si on prend x=3 et y=5. On a $\forall k \in \mathbb{N} : 5 \neq 3^k$ et $3 \neq 5^k$.

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1. $f(2) = \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{5}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}$. Comme $2 \neq \frac{1}{2}$ et $f(2) = f(\frac{1}{2},$ alors f n'est pas injective.

2. $f(x) - 2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} - 2 = 0 \Rightarrow x - 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow -2x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$. On a $\Delta =$ $(-1)^2 - 4(2)(2) = -15 < 0$, alors l'équation $2x^2 - x + 2 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc pour $y = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 2 \Rightarrow f$ n'est pas surjective.

3. Comme $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0, \\ (x-1)^2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + 2x \geq 0, \\ x^2 + 1 - 2x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq -2x & \text{...............}1\,; \\ x^2 + 1 \geq \ \ 2x & \text{...............}2. \end{cases}$

a. Si $x > 0$, alors 1 et 2 entraînent que $x^2 + 1 \geq \ 2x$, donc $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{2x} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$ (car x est positif donc le produit des deux termes par un positif ne change pas le sens de l'inégalité $\leq$).

b. Si $x < 0$, alors 1 et 2 entraînent que $x^2 + 1 \geq -2x$, donc $\frac{1}{x^2+1} \leq -\frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{x}{2x} \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2}$ (car x est négatif donc le produit des deux termes par un négatif change le sens de l'inégalité $\leq$ en $\geq$. Puis pour le cas où $x = 0$ il est clair que $f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0$ qui est dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Donc les deux cas montrent que $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
On peut aussi procéder comme suit :
Comme $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 0, \\ (x-1)^2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + 2x \geq 0, \\ x^2 + 1 - 2x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq -2x & \text{...............}1\,; \\ x^2 + 1 \geq \ \ 2x & \text{...............}2. \end{cases}$ Si on divise les deux termes par $x^2 + 1$ on obtient : $\frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$ et $\frac{-2x}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1}$, donc $\frac{2x}{x^2+1} \leq 1$ et $\frac{-2x}{x^2+1} \leq 1$, alors $\frac{-1}{2} \leq (\frac{x}{x^2+1} = f(x)) \leq \frac{1}{2}$.

Corrigé 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1.

• $f^{-1}(-6)$= $\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x - 3 = -6\}$= $\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x + 3 = 0\}$. On a Δ =$2^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$, alors l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Donc $f^{-1}(-6)$ =$\emptyset$.

• $f^{-1}(0)$= $\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 2x - 3 = 0\}$. On a Δ =$2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$, alors l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$ admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$. Donc $f^{-1}(0) = \{-3, 1\}$.

1.

• **L'injectivité de f** : Comme $f(-3) = f(1) = 0$ et $-3 \neq 1$, alors f n'est pas injective (au fait on peut utiliser cette négation $\exists x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' et f(x) = f(x')$)

• **La surjectivité de f** : comme il exist $(y = -6 \in \mathbb{R})/\ \forall x \in \mathbb{R},\ y \neq f(x)$, alors f n'est pas surjective.

1. Pour déterminer I et J, il faut donner l'intervalle J tel que $\forall y \in J, \exists x \in \mathbb{R}/y = f(x)$ et donner l'intervalle I tel que $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f'x_2)$. Donc pour l'intervalle J il faut résoudre l'équation
$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x - (3 + y) = 0$. On a $\Delta = 16 + 4y = 4(4 + y)$.
Si $\Delta \geq 0$, alors $\exists x \in \mathbb{R}/f(x) = y$. Donc f est surjective pour $J = [-4 \quad +\infty[$. Il est clair que dans J l'équation
$x^2 + 2x - (y + 3)$ admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -1 + \sqrt{4 + y}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1 - \sqrt{4 + y}$. Dans ce cas il faut choisir un intervalle I qui ne contient pas à la fois x_1 et x_2. Comme pour $y = -4$ l'équation
$x^2 + 2x - (y + 3)= x^2 + 2x + 1$ contient une solution double $x = -1$ et $f'(x) = 2x + 2$, $f(-1) = -4$ alors f est croissante sur $]-\infty \quad -1[$ et est décroissante sur $]-1 \quad +\infty[$. Donc pour l'injectivité il faut prendre soit
$I =]-\infty \quad -1]$, soit $I' = [-1, \quad +\infty[$.

4.
   - $f^{-1} : J \to I$
     $x \to -1 - \sqrt{4 + y}$
   - $f^{-1} : J \to I'$
     $x \to -1 + \sqrt{4 + y}$

Mathématiques I

Université A.MIRA–Bejaia
Faculté de Technologie
Département Technologie
Première année Licence LMD
Année universitaire 2024–2025

✠– Corrigé de la série n°3–✠

Corrigé 10 : Calcul des limites
1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-2} = 1$$

2) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{0}{0}$ **F.I** Puisque nous avons une forme indéterminée en $x = 1$, on factorise le numérateur : $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$ Donc,

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+5) = 6$$

3) $\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x^2-1}) = +\infty - \infty$ **F.I** On utilise la méthode du conjugué pour calculer cette limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0$.

Corrigé 11 :
1. Déterminer λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
   On a f est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$ (car la fonction $1 - \dfrac{sin(2x)}{x}$ est somme et rapport des fonctions continues)
   en point 0
   Pour que f soit continue en $x = 0$, il faut que la limite de f en 0 soit égale à $f(0)$. On a $f(0) = \lambda$
   $\lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow0} 1 - \dfrac{\sin(2x)}{x}$ **(F.I)**
   $= \lim\limits_{x\longrightarrow0} 1 - 2\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1 - 2(1) = -1$ $\left(\lim\limits_{y\longrightarrow0} \dfrac{sin(y)}{y} = 1\right)$ Donc, f est continuité ssi :
   $\lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x) = -1 = f(0) = \lambda$ alors $\lambda = -1$
2. Montrons que $f(x) = 0$ admet au moins une racine.
   On a f est continue sur $[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}]$ et on a
   $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - 4\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi} = 1 - \dfrac{4}{\pi} < 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2\dfrac{\sin(\pi)}{\pi} = 1 > 0$
   d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(c) = 0$ c'est à dire, $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}]$.
3. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ (car $\dfrac{x+1}{2}$ et $-x + 2$ sont dérivable)
   Dérivabilité de g en $x = 1$:
   $g'_d = \lim\limits_{x>1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x>1} \dfrac{-x+2-1}{x-1} = -1$
   $g'_g = \lim\limits_{x<1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{x<1} \dfrac{\frac{x+1}{2}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$
   donc, $g'_d \neq g'_g$, d'où g n'est pas dérivable en $x = 1$; alors g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Corrigé 12 : La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 . Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow0} g(x)$:
on a :

$$\left|\sin(x)\sin(\frac{1}{x})\right| = \left|\sin(\frac{1}{x})\right| |\sin(x)| \leq |\sin(x)|\,.$$

Car $\left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leq 1$, d'où $0 \leq \left|\sin(x)\sin(\frac{1}{x})\right| \leq |\sin(x)|$. Donc

$$0 \leq \lim_{x\longrightarrow0} g(x) \leq \lim_{x\longrightarrow0} |\sin(x)| = 0$$

D'après théorème d'encadrement : $\lim_{x\longrightarrow 0} g(x)=0$; donc la fonction g est prolongeable par continuité en 0

2) fonction prolongée est

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases}\sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Corrigé 13 :

1. On a f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et on a $f(1)=f(-1)=0$. Nous pouvons appliquer la théorème de Rolle. Donc d'après théorème de Rolle $\exists c\in]-1,1[$ tel que $f'(c)=0$
2. La fonction $f(x)=ln(x)$ est une fonction continue sur $[n;n+1]$ et dérivable sur $]n;n+1[$, donc d'après théorème des accroissement finis appliqué à cette fonction, il existe $c\in]n;n+1[$ tel que :$(f(n+1)-f(n)=(n+1-n)f'(c)$ c'est à dire :

$$ln(n+1)-ln(n)=\frac{1}{c}$$

Comme $n\geq 1$ on aura :$n<c<n+1$ alors

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n+1}<ln(n+1)-ln(n)<\frac{1}{n}$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \frac{1}{n+1}<ln(n+1)-ln(n)<\frac{1}{n}$$

Corrigé 14 :

1. $\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+1}=\frac{0}{0}$ (C.I) d'après l'hôpital on a
$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^3+5x+6}{x^3+1}=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{3x^2+5}{3x^2}=\frac{8}{3}$
2. $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2+5}{e^x+1}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (C.I) d'après l'hôpital on a
$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2+5}{e^x+1}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2}{e^x}=0$
3. $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{ln(x)+x}{x^2}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (C.I) d'après l'hôpital on a
$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{ln(x)+x}{x^2}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{2x}=0$

Corrigé 15 :

1. $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.
2. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)'\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}-\frac{1}{1+x^2}\\ &=\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}\\ &=\frac{2}{2(1+x^2)}-\frac{1}{1+x^2}=0\end{aligned}$$

d'où $f(x)=c$, c est une constante.
pour $x_0\longrightarrow 1$, on a :
$\lim_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}\left(\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.
$\lim_{x\longrightarrow 1^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\left(\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\arctan x\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} \text{ si } x<1,\\ \\ \frac{-3\pi}{4} \text{ si } x>1.\end{cases}$$