Corrigé de la série de TD N°3

Exercice 1 :

Partie I :

1) Calcule de l'énergie du seuil E_0 (W_0) :

$W = W_0 + E_C \Longrightarrow$ **$W_0 = W - E_C$**

Nous calculons d'abord le travail W :

$$W = h\upsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63.10^{-34} \times 3.10^{8}}{0{,}150.10^{-6}} = 1{,}33.10^{-18} J$$

$$W = \frac{1{,}33.10^{-18}}{1{,}6.10^{-19}} = 8{,}31\ eV$$

$$\Longrightarrow W_0 = 8{,}31\ eV - 4{,}85\ eV = 3{,}46\ eV = 5{,}54.10^{-19} J$$

2) La nature du métal :

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$\Longrightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{6{,}63.10^{-34} \times 3.10^{8}}{5{,}54.10^{-19}} = 3{,}54.10^{-7} m = 0{,}354\ \mu m$$

Si on compare cette valeur à celles données dans le tableau, on voit bien qu'il s'agit du Zinc.

Partie II :

1) L'énergie d'un photon associé au rayonnement incident :

$$E = h\nu = 6{,}63.10^{-34} \times 10^{15} = 6{,}63.10^{-19} J$$

2) On a $W_0 = 2{,}90\ eV = 2{,}90 \times 1{,}6.10^{-19} J = 4{,}64.10^{-19} J$

La fréquence seuil υ_0 :

$$\upsilon_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{4{,}64.10^{-19}}{6{,}63.10^{-34}} = 0{,}7.10^{15} Hz = 7.10^{14} Hz$$

$\Longrightarrow \upsilon_0 < \upsilon$ donc il y a effet photoélectrique (des électrons peuvent être émis).

Calcul de leurs énergies cinétiques :

$$E_c = E - W_0 = 6{,}63.10^{-19} - 4{,}64.10^{-19} = 1{,}99.10^{-19} J$$

3) Pour la plaque de cuivre ($W_0 = 4{,}65$ eV) :

$$W_0 = 4{,}65 \times 1{,}6.10^{-19} = 7{,}5.10^{-19} J$$

$\upsilon_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{7{,}5.10^{-19}}{6{,}63.10^{-34}} = 1{,}13.10^{15} Hz \Longrightarrow \upsilon_0 > \upsilon$ donc pas d'effet photoélectrique.

Exercice 2 :

1) Seuil photoélectrique (W_0 =1,88 eV) :

a) Calcul de la longueur d'onde λ_0 qui correspond au seuil photoélectrique :

On a : $W_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$ donc $\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \frac{6{,}63.10^{-34}\times 3.10^{8}}{1{,}88\times 1{,}6.10^{-19}} = 6{,}61.10^{-7}m = 661nm$

b) Pour qu'il y ait effet photoélectrique, il faut que $E > W_0$

Donc $\frac{hc}{\lambda} > \frac{hc}{\lambda_0} \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda_0} \Longrightarrow \lambda < \lambda_0$

λ = 495 nm < λ_0 donc il y a effet photoélectrique.

λ = 720 nm > λ_0 donc pas d'effet photoélectrique.

2) Vitesse d'émission des électrons :

a) L'énergie cinétique maximale $E_{c,max}$ d'un électron émis :

$$E_{c,max} = E - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{6{,}63.10^{-34}\times 3.10^{8}}{600.10^{-9}} - (1{,}88\ \times 1{,}6.10^{-19}) = 0{,}307.10^{-19}J$$

b) Calcul de la vitesse maximale V_{max} d'un électron émis :

$$E_{c,max} = \frac{1}{2}m_e V_{max}{}^2 \Longrightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{2E_{c,max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times 0{,}307.10^{-19}}{9{,}11.10^{-31}}} = 2{,}596.10^{5}m/s$$

Exercice 3 :

1) A partir des postulats de Bohr, retrouver les expressions donnant le rayon, la vitesse et le niveau d'énergie d'un ion hydrogénite quelconque en fonction de n :

Consultez le résumé du cours : c'est plus simple. Sinon, utilisez mon cours pour ceux qui assistent aux TD et aux cours

Système : électron soumis à la force de Coulomb d'intensité $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_e q_p|}{r^2}$

Repère : repère de Frenet D'après le 2e principe de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Selon la normale : $F_C = ma_n$

En remplaçant: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_e q_p|}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = mv^2 \Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}$

D'après le 1er postulat de Bohr, seules les orbites dont les rayons sont définis par

$$mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \Rightarrow v_n = \frac{nh}{2\pi m r_n} \qquad (3)$$

$$r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2} \qquad (2)$$

En remplaçant l'expression (3) dans l'expression (2) on trouve : $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$ (4)

Les rayons des différentes couches K, L, M, ..., sont proportionnels **au carré du nombre quantique principal n** : $\mathbf{r_n \sim n^2}$

L'orbite la plus proche du proton est celle correspondant à la couche K (n = 1). Le rayon de cette orbite vaut :

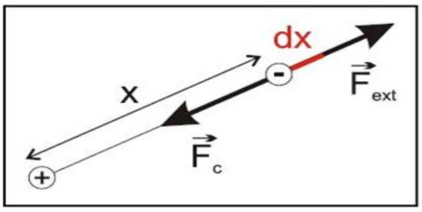
$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0{,}529 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

On l'appelle « **rayon de Bohr** ». $\boxed{\mathbf{r_n = r_1\, n^2}}$

Considérons le système formé par l'atome d'H (proton et électron).

* La variation de l'énergie mécanique E est donnée par le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E = \sum W(\vec{F}_{ext.})$

Appliquons une force extérieure $\vec{F}_{ext.}$ pour arracher l'électron de l'atome d'H **à vitesse constante.**
L'énergie cinétique du système est donc constante au cours du temps.
Donc : $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_p = W(\vec{F}_{ext.})$



Soit r le rayon de l'orbite de laquelle l'électron est retiré. La distance x entre électron et proton varie donc de la valeur r jusqu'à l'infini.

$$\Delta E_p = E_p(x \to \infty) - E_p(x = r) = W(\vec{F}_{ext.})$$

Attribuons arbitrairement l'état de référence de l'énergie potentielle (= niveau où $E_p = 0$) à l'électron libre, c.-à-d. à l'électron se trouvant à une distance r infinie du proton.

$$E_p(x \to \infty) = 0 \qquad \text{et} \qquad \boxed{E_p(r) = -W(\vec{F}_{ext.})}$$

Comme la vitesse de l'électron est constante, la force extérieure doit être, à chaque instant, opposée à la force de Coulomb (principe d'inertie de Newton) : $\vec{F}_{ext.} = -\vec{F}_C$

L'intensité de ces forces est la même : $F_{ext.} = F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{x^2}$

Travail élémentaire de la force à exercer par l'opérateur pour un **éloignement** infinitésimal dx (sur lequel $\vec{F}_{ext.}$ ne varie pratiquement pas) de l'électron du proton :

$$dW(\vec{F}_{ext.}) = F_{ext.}dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{x^2}dx$$

Le travail total est alors la somme de tous les travaux élémentaires où x a varié de la valeur r jusqu'à l'infini. $W(\vec{F}_{ext.}) = \int_r^{\infty} dW(\vec{F}_{ext.})$

En remplaçant dans l'expression trouvée précédemment on obtient :

$$E_p(r) = -W(\vec{F}_{ext.}) = -\int_r^{\infty} dW(\vec{F}_{ext.}) = -\int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{x^2}dx = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_r^{\infty}$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

L'énergie potentielle du système proton – électron correspondant au rayon orbital r vaut :

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

Energie cinétique $E_c(r) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$

$$\boxed{E_c(r) = -\frac{1}{2}E_p(r)}$$

Energie de l'atome H $E(r) = E_p(r) + E_c(r) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

Vu que les rayons sont quantifiés ($r_n = r_1 n^2$), l'énergie l'est certainement aussi

$$\boxed{E(r_n) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_n}} \qquad (5)$$

Expression fondamentale

On vient de montrer que : $E(r_n) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_n}$ et $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}n^2$

On en tire l'expression de l'énergie de l'atome H en fonction du nombre quantique principal :

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$$

n = 1 : l'énergie de l'atome d'hydrogène vaut : $E_1 = -21{,}8 \cdot 10^{-19}$ J = -13,6 eV

$$\boxed{\mathbf{E_n = \frac{E_1}{n^2}}} \qquad \text{avec } E_1 = -13{,}6 \text{ eV.}$$

2) L'énergie du niveau fondamental ainsi que celle des niveaux 2, 3, 4, 5 et l'infini :

On a : $E_n = -\frac{13,6}{n^2} eV$. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Couche	n	r_n (nm)	E_n (eV)
K	1	0,0529	- 13,6
L	2	0,2116	- 3,40
M	3	0,4761	- 1,51
N	4	0,8467	- 0,85
O	5	1,3225	- 0,544
	∞	∞	0

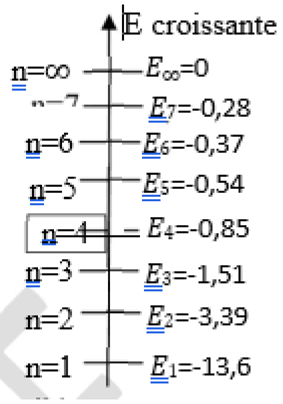
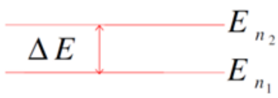


Diagramme énergétique

3) Calcul de la variation d'énergie associée à l'électron lors de son passage de l'état fondamental, au premier et au second état excité :



$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1}$

$n_1 = 1$ et $n_2 = 2$ => $\Delta E = 13,6\,(1/1 - 1/4) = 3/4 \times 13,6 = 10,2$ eV

$n_1 = 1$ et $n_2 = 3$ => $\Delta E = 13,6\,(1/1 - 1/9) = 8/9 \times 13,6 = 12,088$ eV

Calcul de l'énergie d'ionisation :

$n_1 = 1$ et $n_2 = \infty \Rightarrow \Delta E = 13,6\,(1/1 - 1/\infty) = 13,6$ eV

4) La relation de Balmer :

On a : $\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} \Rightarrow \Delta E = 13,6(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2})$

D'autre part, on a : $\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Donc :

$$\frac{hc}{\lambda} = 13,6(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{13,6}{hc}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad (n_2 > n_1)$$

Calcul de la constante de Rydberg (R_H) pour l'atome d'hydrogène :

$$R_H = \frac{13,6 \times 1,6.10^{-19}}{6,63.10^{-34} \times 3.10^8} = 1,097.10^7 m^{-1}$$

Pour un hydrogénoïde :

$$r_n = \frac{r_{Hydrogène}}{Z}$$

$$E_n = E_{Hydrogène} \times Z^2$$

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \times Z^2 \times (\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2})$$

5)

a. La valeur de la force d'attraction exercée par le noyau sur l'électron :

On a pour un hydrogénoïde

$F_c = \frac{k.Z.e^2}{r^2}$. Sachant que $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ S.I$

On retrouve d'abord la valeur du numéro atomique Z :

On a :

$$r_n = \frac{r_{Hdrogène}}{Z}$$

$\Rightarrow Z = \frac{r_{Hydrogène}}{r_1}$ Tel que n = 1 (l'état fondamental).

$$Z = \frac{0{,}53}{0.27} = 2 \quad \Rightarrow F_c = \frac{9.10^9 \times 2 \times (1.6.10^{-19})^2}{(0{,}27.10^{-10})^2} = 6{,}32.10^{-7}\ N$$

b. La vitesse de l'électron sur cette orbite :

On a $F = m_e \frac{v^2}{r}$ => $v = \sqrt{\frac{F.r}{m_e}} = \sqrt{\frac{6{,}32.10^{-7} \times 0{,}27.10^{-10}}{9{,}11.10^{-31}}} = 4{,}3.10^6\ m/s$

c. L'énergie totale de l'électron :

$E = -13{,}6 \times Z^2 = -13{,}6 \times 4 = -54{,}4\ eV = -54{,}4 \times 1{,}6.10^{-19} J = -87{,}04.10^{-19} J$

Exercice 4

1) Définition :

Transition électronique : Le passage d'un niveau d'énergie à un autre.

Photon : Une particule (quantum d'énergie) de masse et de charge nulles se déplaçant à la vitesse de la lumière.

Etat fondamental : C'est l'état d'énergie le plus bas de l'atome.

2) La valeur de l'énergie correspondant à l'état fondamental :

$E_n = -13{,}6/n^2 \Rightarrow E_1 = -13{,}6/1^2 =$ -13,6 eV.

3.1. La variation de l'énergie lors de la transition 4 ⟶ 2 :

$\Delta E_{4\text{-}2} = E_2 - E_4 = (-13{,}6/4) - (-13{,}6/16) =$ -2,55 eV

3.2. IL y a émission d'un photon car $\Delta E < 0$.

3.3. L'énergie du photon émis :

$E = |\Delta E| =$ 2,55eV

La longueur d'onde du photon émis :

$E = hc/\lambda \Rightarrow \lambda = hc/E = 6{,}63.10^{-34}\times 3.10^{8}/(2{,}55\times 1{,}6.10^{-19}) =$ $4{,}88.10^{-7}$ m

4.1. Pour un atome d'hydrogène à l'état fondamental (niveau n=1), la plus grande longueur d'onde des radiations qu'il peut absorber correspond à la transition avec la plus petite différence d'énergie, qui est celle vers le niveau n=2. En effet, les longueurs d'onde plus grandes correspondent à des énergies plus petites.

Donc : $\Delta E_{1\text{-}2} = E_2 - E_1 = -3{,}4 - (-13{,}6) = 10{,}2$ eV.

$\Rightarrow \lambda = 6{,}63.10^{-34}\times 3.10^{8}/(10{,}2\times 1{,}6.10^{-19}) =$ $1{,}22.10^{-7}$ m, soit $\lambda = 122$ nm

4.2. Cette radiation appartient au domaine spectral Ultraviolet (UV).

5) Les photons qui peuvent être absorbés, et l'état final du système :

- Le photon de 13,6 eV : Cette énergie correspond exactement à l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, donc le photon sera absorbé et l'atome sera ionisé.
- Le photon de 14,6 eV : Cette énergie est supérieure à 'énergie d'ionisation, donc le photon sera absorbé et l'atome sera ionisé. L'excès d'énergie (14,6 – 13,6) = 1 eV sera transféré à l'électron comme énergie cinétique.
- Le photon de 8,2 eV : Cette énergie ne correspond à aucune transition possible à partir de l'état fondamental, donc le photon ne sera pas absorbé.

Explication : Un photon n'est absorbé que s'il permet une transition du niveau $n_1 = 1$ vers un niveau n_2 sachant que $n_2 \in \mathbb{N}^*$ (entier naturel non nul).

$n_2 = \sqrt{\frac{13{,}6}{13{,}6-8{,}2}} = 1{,}58 \notin \mathbb{N}^*$ Pas de transition possible, donc ce photon n'est pas absorbé et l'électron reste à l'état fondamental.

- Le photon de 10,2 eV : $n_2 = \sqrt{\frac{13{,}6}{13{,}6 - 10{,}2}} = 2$

Cette énergie correspond exactement à la transition de n = 1 vers n = 2 donc le photon sera absorbé et l'électron sera à l'état excité (1er état excité).