Université Abderrahmae MIRA Béjaia
Faculté de Thechnologie
Département de Technologie
$1^{\text{ère}}$ année ST-LMD

Janvier 2025
10H30-12H00

Examen de MATHS 1

Les calculatrices et les téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (4 pts)

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ 7^n - 1 \text{ est un multiple de } 6.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer par contraposition que :

$$(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8 \Longrightarrow n \text{ est pair.}$$

Exercice 2 : (8 pts)

I. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \ x\Re y \Leftrightarrow x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 2.

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \ f(2-a) = f(2+a)$.
2. L'application f est-elle injective ? Justifier.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$.
4. L'application f est-elle surjective ? Justifier.
5. Soit l'application $g : [2, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$.
   Montrer que l'application g est bijective et donner l'application réciproque g^{-1}

Exercice 3 : (8 pts)

I. Soient a, b deux réels non nuls. Et soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3ax + 2b; & \text{si } x < 1 \\ bx + 3a; & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de a et b.
2. Donner les valeurs de a et b, pour lesquelles f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

II. **(Questions de cours)**

1. Donner la définition de la fonction arccos.
2. Donner sa fonction dérivée.
3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \arccos(x) + \arccos(-x), \forall x \in [-1, 1].$$

a. Montrer que $g'(x) = 0, \ \forall x \in]-1, 1[$.
b. Déduire que $g(x) = \pi$.

Bon courage

Université A. MIRA-Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Janvier 2025

Corrigé de l'examen de MATHS 1

Exercice 1: (4 pts)

1. Montrons par récurrence que :

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N} : \; 7^n - 1 \text{ est un multiple de } 6.$$

On peut écrire :

$$P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : \; 7^n - 1 = 6k.$$

- Pour $n = 0$, on a $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 6 \times 0$, donc $P(0)$ est vraie. 0,5
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{N} : \; 7^n - 1 = 6k,$$

et montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N} : \; 7^{n+1} - 1 = 6k'.$$ 0,5

On a :

$$\begin{aligned} 7^n - 1 = 6k &\Longrightarrow 7 \times (7^n - 1) = 7 \times 6k, \quad k \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow 7 \times 7^n - 1 - 6 = 6 \times 7k \\ &\Longrightarrow 7^{n+1} - 1 = 6(7k+1) \end{aligned}$$ 01

donc

$$\exists k' = (7k+1) \in \mathbb{N} : \; 7^{n+1} - 1 = 6k'$$

alors $P(n+1)$ est vraie.
- Par suite, la proposition $P(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Montrons par la contraposition que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8 \Longrightarrow n \text{ est pair.}$$

Ça revient à montrer que

$$n \text{ est impair} \Longrightarrow (n^2 - 1) \text{ divisible par } 8.$$ 0,5

Soit n impair alors : $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1$, donc

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k) \\ &= 4k(k+1) \\ &= 8\tfrac{k(k+1)}{2} \end{aligned}$$ 01

$k(k+1)$ est pair alors $\frac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$, donc, $n^2 - 1 = 8K$, avec $K = \frac{k(k+1)}{2}$ 0,5
Par le principe de contraposition, on a montré que :

$$(n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 8 \Longrightarrow n \text{ est pair.}$$

Exercice 2: (8 pts)

I. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation binaire $\Re$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^* : \; x \Re y \Leftrightarrow x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

1. Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^*$

   a) Réflexivité de $\Re$:

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $x - x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$, donc $x\Re x$, d'où $\Re$ est réflexive 0,5

   b) symétrie de $\Re$:

   Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. On a

   $$x\Re y \Longrightarrow x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

   en multipliant par (-1), on trouve

   $$y - x = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \Longrightarrow y\Re x,$$

   d'où $\Re$ est symétrique. 01

   c) Transitivité de $\Re$:

   Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ tels que $x\Re y$ et $y\Re z$. On a

   $$\begin{cases} x\Re y \\ \text{et} \\ y\Re z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \ldots .(1) \\ \text{et} \\ y - z = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \ldots .(2) \end{cases} \quad (1) + (2) \Longrightarrow x - z = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \Longrightarrow x\Re z$$

   d'où $\Re$ est transitive. 01

   Conclusion: de a), b) et c), $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^*$.

2. La classe d'équivalence de 2 :

$$\begin{aligned} \overline{2} &= \{x \in \mathbb{R}^*, x\Re 2\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^*,\ x - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^*,\ x - \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{3}{2}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^*,\ 2x^2 - 3x - 2 = 0\} \end{aligned}$$

on a $\Delta = 25 > 0$, donc il existe deux solutions réelles $x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$, d'où:

$$\overline{2} = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}.$$ 01

II. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Montrons que $\forall a \in \mathbb{R},\ f(2-a) = f(2+a)$. On a

   $$f(2-a) = (2-a)^2 - 4(2-a) + 5 = 4 - 4a + a^2 - 8 + 4a + 5 = a^2 + 1$$

   et

   $$f(2+a) = (2+a)^2 - 4(2+a) + 5 = 4 + 4a + a^2 - 8 - 4a + 5 = a^2 + 1,$$

   d'où

   $$f(2-a) = f(2+a).$$ 0,5

2. f n'est-elle injective, car $f(2-a) = f(2+a)$ mais $2 - a \neq 2 + a$. 01
3. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$. On a

   $$f(x) - 1 = x^2 - 4x + 5 - 1 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0$$

   d'où $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. 0,5
4. f n'est pas surjective, car $\forall y \in]-\infty, 1[: f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$. 01

5. Soit l'application $g : [2, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$.
Montrons que l'application g est bijective et donnons l'application réciproque g^{-1}.
Soit $y \in [1, +\infty[: y = g(x)$, donc $x^2 - 4x + 5 - y = 0....(1)$.

$$\Delta = 16 - 4(5 - y) = 4y - 4 = 4(y - 1), \text{ avec } y \in [1, +\infty[,$$

alors $\Delta \geq 0$ et l'équation (1) admet deux solutions

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{y-1}}{2} = 2 - \sqrt{y-1} \leq 2 \notin [2, +\infty[$$

$$x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{y-1}}{2} = 2 + \sqrt{y-1} \geq 2 \in [2, +\infty[$$

01

Par suite, $\forall y \in [1, +\infty[, \exists! x \in [2, +\infty[: g(x) = y$. Donc g est bijective.
Son application réciproque :

$$\begin{array}{rcl} g^{-1} : [1, +\infty[& \longrightarrow & [2, +\infty[\\ y & \longrightarrow & g^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-1}. \end{array}$$

0,5

Exercice 3: (8 pts)

Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3ax + 2b & \text{si } x < 1 \\ bx + 3a & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Continuité de f sur $\mathbb{R}$:
on a
- Sur $]-\infty, 1[$: $f(x) = x^2 + 3ax + 2b$ qu'est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) donc en particulier f continue sur $]-\infty, 1[$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

- Sur $]1, +\infty[$: pour les mêmes raisons, f est continue sur $]1, +\infty[$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

0,5

Continuité de f au point 1:
On a $f(1) = b + 3a$.

0,5

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = 3a + 2b + 1$$

0,5

$$\text{et } \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = b + 3a.$$

0,5

f est continue en 1 $\Leftrightarrow 3a + 2b + 1 = 3a + b \Leftrightarrow b = -1$ ~~et $a \in \mathbb{R}$~~.

0,5

Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = -1$ et $a \in \mathbb{R}$.

2. Dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$:
f dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ continue sur $\mathbb{R} \Longrightarrow b = -1$ et $a \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3ax - 2 & \text{si } x < 1 \\ -x + 3a & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, car f est une fonction polynômiale. 0,5

Dérivabilité de f en 1 :

$$\lim_{\substack{\leq \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{(x^2 + 3ax - 2) - (3a - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{(x-1)(x + 3a + 1)}{x - 1} = 3a + 2$$ 01

D'autre part:

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{(-x + 3a) - (3a - 1)}{x - 1} = -1$$ 0,5

Donc, f dérivable en $1 \iff 3a+2=-1 \Leftrightarrow \quad a=\frac{-3}{3}=-1.$ 0,5

Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow a=b=-1.$

II)

1.

$$\begin{aligned} \text{arccos}: \quad & [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ & y \longmapsto \arccos y = x \end{aligned}$$ 01

avec $x=\arccos y \iff y=\cos x$.

2. La dérivée : arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\forall x \in]-1,1[)$$ 01

3. On a $g(x)=\arccos(x)+\arccos(-x)$ dérivable sur $]-1,1[$.

a. $g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+(-1)\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ 0,5

b. On a $g'(x)=0$, pour tout $x \in]-1,+1[$ donc g est constante, et on a g continue sur $[-1,1]$:

$$g(0)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi(\text{ en } x=0).$$ 0,5