CHAPITRE 2

LE CHAMP ELECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

1. DEFINITION

On dit qu'en une région de l'espace règne un champ électrostatique $\vec{E}$ si une charge électrique q placée en un point de cette région est soumise à une force :

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Si $q > 0$ alors $\vec{E}$ et $\vec{F}$ ont même direction et même sens, si $q < 0$ alors $\vec{E}$ et $\vec{F}$ ont même direction et de sens opposés.

Le champ électrostatique est un vecteur polaire (ou vecteur vrai), c'est à dire un vecteur défini indépendamment de l'orientation de l'espace.

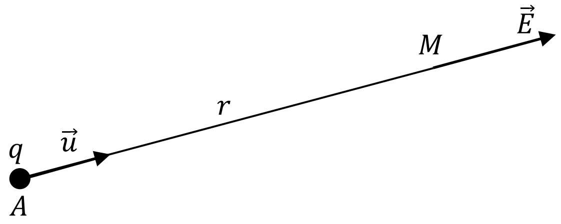
Cette façon de définir le champ électrostatique découle de (ou implique) une nouvelle vision de l'espace : les particules chargées se déplacent maintenant dans un espace où existe (se trouve défini) un champ vectoriel. Elles subissent alors une force en fonction de la valeur du champ au lieu où elle se trouve

2. CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

2.1 Champ crée par une charge ponctuelle

Une charge q placée en A crée un champ $\vec{E}$. Plaçons en M une charge $\acute{q}$. Cette charge sera soumise à une force $\vec{F}$ telle que :

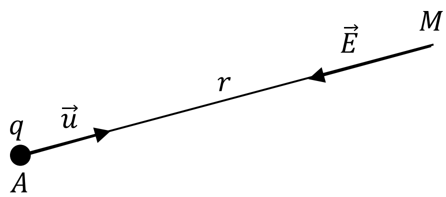
$$\vec{F} = K\frac{q\acute{q}}{r^2}\,\vec{u}$$



D'où le champ crée par q en M :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{\acute{q}} = K\frac{q}{r^2}\,\vec{u}$$

Si $q > 0$, alors $\vec{E}$ s'éloigne de q.



$$r = \|\overrightarrow{AM}\|, \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$$

Si $q < 0$, alors $\vec{E}$ est dirigé vers q.

Le champ électrostatique en A n'est pas défini. L'unité du champ électrostatique est le Volt/mètre (symbole V/m).

2.2 Champ crée par plusieurs charges ponctuelles

Comme pour la force électrostatique, on utilise le principe de superposition. Chaque charge q_i placée en un point A_i, crée en M un champ $\vec{E}_i$:

$$\vec{E}_i = K\frac{q_i}{r_i^2}\,\vec{u}_i$$

Avec

$$r_i = \left\|\overrightarrow{A_iM}\right\|, \vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{A_iM}}{\left\|\overrightarrow{A_iM}\right\|}$$

Le champ résultant en M sera la somme des champs crées par chaque charge en ce point :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = K\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^2}\,\vec{u}_i$$

3. CHAMP ELECTROSTATIQUE CREE PAR UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

Pour calculer le champ crée par une distribution continue de charges, on se ramène au calcul du champ crée par des charges ponctuelles en considérant des charges élémentaires dq.

3.1 Cas d'une distribution de charges linéique

Un élément de longueur dl en A porte la charge $dq = \lambda\, dl$ assimilable à une charge ponctuelle. Elle crée en M un champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dE} = K\frac{\lambda\, dl}{r^2}\,\vec{u}$$

Le champ crée en M par toutes les charges du fil sera :

$$\vec{E} = K\int_C \frac{\lambda\, dl}{r^2}\,\vec{u}$$

3.2 Cas d'une distribution de charges surfaciques

Un élément de surface ds en A porte la charge $dq = \sigma\, ds$ assimilable à une charge ponctuelle. Elle crée en M un champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dE} = K\frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$

Le champ crée en M par toutes les charges de la surface sera :

$$\vec{E} = K\iint_S \frac{\sigma\, ds}{r^2}\,\vec{u}$$

3.3 Cas d'une distribution de charges volumiques

Un élément de volume dv en A porte la charge $dq = \rho\, dv$ assimilable à une charge ponctuelle. Elle crée en M un champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dE} = K\frac{\rho\, dv}{r^2}\,\vec{u}$$

Le champ crée en M par toutes les charges du fil sera :

$$\vec{E} = K\iiint_V \frac{\rho\, dv}{r^2}\,\vec{u}$$

Remarques :

- Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est à l'intérieur de l'intégrale.
- Dans la majorité des cas, on considère des densités de charges constantes (indépendantes du temps et de la position), ce qui permet de les faire sortir des intégrales.

3.4 Méthodologie de calcul de $\vec{E}$

- On décompose la distribution charges élémentaires ponctuelles dq.
- On calcule le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ crée par la charge élémentaire dq.
- On intègre sur toute la distribution $\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}$.

En fait $\vec{E}$ est défini par ces trois composantes cartésiennes qu'il faut calculer séparément. Plutôt que de calculer les trois composantes de $\vec{E}$, il peut être plus facile de rechercher la direction de $\vec{E}$ puis de calculer simplement son module. Ceci est possible du fait que le champ $\vec{E}$ possède la symétrie de la distribution de charges

Principe de Curie : Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

4. SYMETRIES ET INVARIANCES DE DISTRIBUTIONS DE CHARGES

Symétrie plane : une distribution de charges est symétrique par rapport à un plan P, si pour deux points M et $\acute{M}$ symétriques par rapport à ce plan, la densité de charges vérifie :

$$\rho(M) = \rho(\acute{M})$$

Dans ce cas, le champ électrostatique $\vec{E}$ est parallèle au plan P.

Antisymétrie plane : une distribution de charges est antisymétrique par rapport à un plan P, si pour deux points M et $\acute{M}$ symétriques par rapport à ce plan, la densité de charges vérifie :

$$\rho(M) = -\rho(\acute{M})$$

Dans ce cas, le champ électrostatique $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan P.

Invariance par translation : si la distribution de charges est invariante dans toute translation parallèle à l'axe (OZ), alors le champ électrostatique $\vec{E}$ ne dépend pas de z (il dépend des autres coordonnées).

Exemples :

- Champ crée par un fil infini d'axe (OZ)
- Champ crée par un cylindre infini d'axe (OZ)
- Champ crée par un plan infini.

Invariance par rotation (symétrie axiale): si la distribution de charges est invariante dans toute rotation θ autour d'un axe ((OZ) par exemple), alors le champ électrostatique $\vec{E}$ ne dépend pas de θ. L'axe (OZ) est un axe de symétrie (de révolution). Tout plan contenant cet axe est un plan de symétrie. Le champ $\vec{E}$ est porté par l'axe de symétrie.

Symétrie cylindrique : dans une symétrie cylindrique, la distribution de charges est invariante dans toute translation parallèle à l'axe (OZ) et dans toute rotation θ autour de cet axe.

En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), le champ électrostatique $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{e}_\rho$ et ne dépend que de ρ :

$$\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$$

Symétrie sphérique : une distribution de charges à symétrie sphérique est invariante par rotation autour de tous les axes passant par un point O de la distribution. Ce point est alors dit « centre de symétrie ».

En coordonnées sphériques (r, θ, φ), le champ électrostatique $\vec{E}$ est radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

Le centre de symétrie est l'intersection de tous les plans de symétrie et le champ $\vec{E}$ est nul en ce point.

5. LIGNE ET TUBE DE CHAMP

Le concept de lignes de champ (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs.
Une ligne de champ est une courbe tangente au champ électrostatique. Son équation s'obtient comme suit :

Si $\overrightarrow{dl}$ est un élément d'une ligne de champ alors $\overrightarrow{dl}//\vec{E} \Rightarrow \vec{E}\wedge\overrightarrow{dl} = \vec{0}$.

En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$ et les lignes du champ sont calculées en résolvant :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{dl} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k}$ et les lignes du champ sont calculées en résolvant :

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

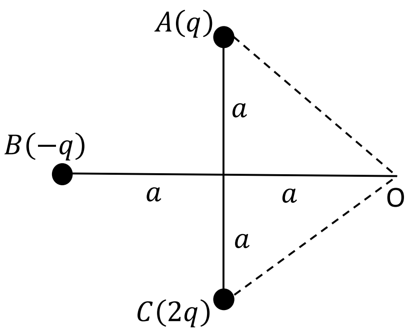
En coordonnées sphériques, $\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\vec{u}_\varphi$ et les lignes du champ sont calculées en résolvant :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi}$$

Soit un contour fermé C tel que le champ électrostatique y soit tangent, c'est à dire tel que $\vec{E} \perp \overrightarrow{dl}$ où $\overrightarrow{dl}$ est un vecteur élémentaire de C. En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. L'ensemble de toutes les lignes de champ dessine alors une surface dans l'espace, une sorte de tube. Par construction, le flux du champ électrostatique est nul à travers la surface latérale du tube, de telle sorte que le flux est conservé : ce qui rentre à la base du tube ressort de l'autre coté. On appelle un tel « rassemblement » de lignes de champ un tube de flux.

6. EXEMPLES D'APPLICATION

- Calculer le champ électrostatique crée au milieu du carré (voir chapitre 1).
- Soit la distribution de charges ponctuelles de la figure suivante :



Calculer le champ crée par ces trois charges au point O.

- Soit une ligne infinie de section négligeable, et portant une charge linéique uniforme λ. Calculer le champ électrique en tout point M de l'espace.
- Un disque de rayon R est chargé en surface. La densité surfacique de charges est σ ($\sigma > 0$). Calculer le champ électrique créé par cette distribution, en un point M de l'axe de ce disque. En déduire le champ crée par un plan infini.
- Un cylindre infini de rayon R est chargé en volume. La densité volumique de charges est ρ ($\rho > 0$). Calculer le champ électrique en tout point M de l'espace.
- Déterminer l'équation des lignes de champ d'une charge ponctuelle (q).