CHAPITRE 7

LES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

1. DEFINITIONS

1.1 Définition d'un conducteur

C'est un milieu dont les porteurs de charges libres peuvent se mettre en mouvement sous l'action d'une force. Dans la cadre de ce chapitre, il s'agit de la force électrostatique induite par un champ électrostatique.

1.2 Définition d'un conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur est dit en équilibre, si toutes ses charges libres sont immobiles.

2. PROPRIETES D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

- Le champ à l'intérieur du conducteur est nul $\vec{E}_{int} = \vec{0}$. En effet :

$$\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{0}$$

- Le conducteur est un volume équipotentiel : le potentiel du conducteur est le même en tout point du volume et il est égale à celui de la surface. En effet :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = \vec{0} \Longrightarrow V = cste$$

- La distribution des charges électriques ne peut être que surfacique. En effet, considérons un conducteur chargé en équilibre électrostatique. Appliquons le théorème de Gauss en un point M du conducteur :

$$\phi = \oiint \vec{E}\,.\overrightarrow{ds} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0\big(\vec{E} = \vec{0}\big) \Rightarrow q_{int} = 0 \Longrightarrow \rho V = 0 \Longrightarrow \rho = 0$$

Donc, la charge du conducteur est surfacique avec une densité σ.

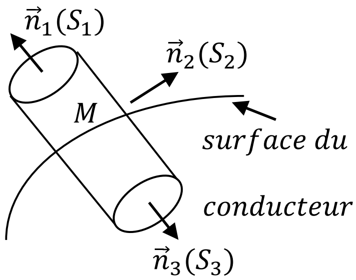
3. CHAMP AU VOISINAGE D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

3.1 Théorème de Coulomb

Soit un conducteur en équilibre électrostatique, chargé avec une densité σ et M un point très proche de la surface du conducteur. Construisons autour de ce point une surface fermée S (sous forme d'un cylindre). Cette surface peut se décomposée en trois surfaces : $S_1\ (base), S_2(surface\ latérale)$ et $S_3\ (base)$. Appliquons le théorème de Gauss :

$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \oiint_{(S_1)} \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \oiint_{(S_2)} \vec{E}.\overrightarrow{ds} + \oiint_{(S_3)} \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \phi_{S_1}(\vec{E}) + \phi_{S_2}(\vec{E}) + \phi_{S_3}(\vec{E})$$

Puisque $\vec{E} = \vec{0}$ à l'intérieur du conducteur, alors $\phi_{S_3}(\vec{E}) = \vec{0}$.



La surface S_2 est tangente à $\vec{E}$, ce qui implique que $\phi_{S_2}(\vec{E}) = \vec{0}$.

Il ne reste donc que le terme :

$$\phi_{S_1}(\vec{E}) = ES_1 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface du conducteur.

Si $\sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur. Si $\sigma < 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur.

Les lignes du champ sont normales à la surface du conducteur. Ce résultat constitue le théorème de Gauss.

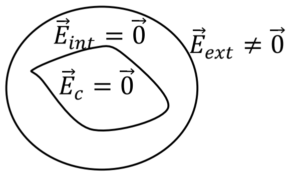
<u>Conséquences :</u>

- Dans le cas d'un conducteur sphérique, on a $\sigma = Q/4\pi R^2$, et le champ au voisinage est donné par :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi R^2}\vec{n}$$

Ce résultat montre que la sphère chargée est équivalente à une charge ponctuelle placée au son centre O et de même charge.

- Dans le cas d'un conducteur présentant une cavité : le champ est nul à l'intérieur de la cavité, comme il l'est dans la partie massive du conducteur, et cela, quelles que soient les conditions extérieures au conducteur. Ce dernier constitue un écran électrostatique : tout champ extérieur ne peut être décelé dans la cavité. On peut montrer, qu'inversement, tout champ appliqué dans la cavité, ne sera pas décelé à l'extérieur du conducteur.



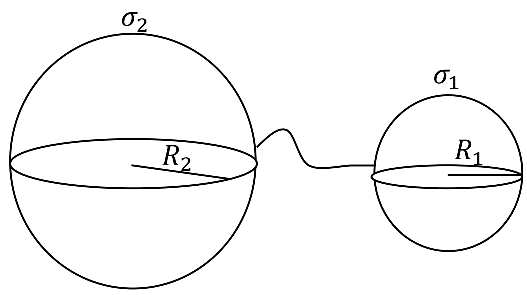
Application : cage de Faraday qui est une cage métallique permettant d'effectuer des mesures, en étant à l'abri des champs extérieurs, ou inversement, sans perturber les expériences extérieures.

3.2 Pouvoir des pointes

Soient deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), chargés avec des densités surfaciques $\sigma_1$et σ_2 respectivement et reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut considérer donc que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V avec l'autre sphère. Cela implique que :

$$V_1 = V_2 \Longrightarrow K\frac{\sigma_1 S_1}{R_1} = K\frac{\sigma_2 S_2}{R_2} \Longrightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Donc, la densité de charge varie en sens inverse du rayon de la sphère ou du rayon de courbure d'une surface quelconque. Par conséquent, si le conducteur présente une pointe, R est faible donc σ est élevée, d'où $E = \sigma/\varepsilon_0$ sera intense et provoquera, au voisinage de la pointe, l'ionisation de l'air qui déchargera la pointe. Il est donc impossible de conserver la charge d'un conducteur muni de pointes.



Application : paratonnerre.

3.3 Pression électrostatique

Soit dS un élément de surface d'un conducteur en équilibre électrostatique portant une charge totale Q répartie uniformément sur sa surface avec une densité σ. Cherchons la force dF appliquée à la charge élémentaire dq portée par dS :

$$dF = E_1 dq$$

où E_1 est le champ crée par toutes les autres charges sauf dq, c'est-à-dire, la charge $Q - dq = Q - \sigma dS$.

Soit E_2 le champ crée par la charge dq. On peut considérer, en première approximation, que la surface ds est sous forme d'un disque, dont le champ en un point très voisin est donné par :

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Le champ total est :

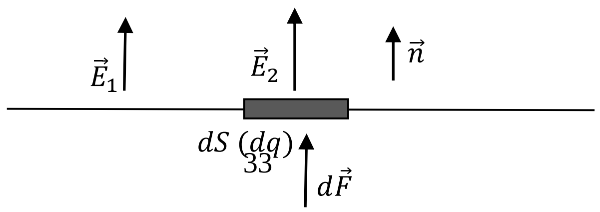
$$E = E_1 + E_2 \Longrightarrow E_1 = E - E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Donc

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \Longrightarrow d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\,\vec{n}$$

Quelque soit le signe de σ, la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur. Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface. On définit la pression électrostatique en un point M du conducteur par :

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$



Cette pression est, en général, trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent.

4. CAPACITE D'UN CONDUCTEUR EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

Lorsqu'un conducteur en équilibre est seul dans l'espace, sa charge est proportionnelle à son potentiel. Le coefficient de proportionnalité noté C est appelé capacité du condensateur.

$$C = \frac{Q}{V}$$

La capacité C caractérise le conducteur, elle dépend de sa forme et de ses dimensions géométriques.

<u>Unités :</u>

Dans le SI, C s'exprime en Farad : le Farad est une unité très grande on utilise plutôt des sous multiple : Le microfarad: 1μF = 10^{-6}F, le nanofarad: 1nF = 10^{-9}F, le picofarad: 1pF = 10^{-12} F.

<u>Exemple :</u>

Expression de la capacité d'une sphère conductrice de centre O et de rayon R :

Considérons une sphère conductrice en équilibre portant une charge totale Q répartie sur la surface avec une densité constante σ.

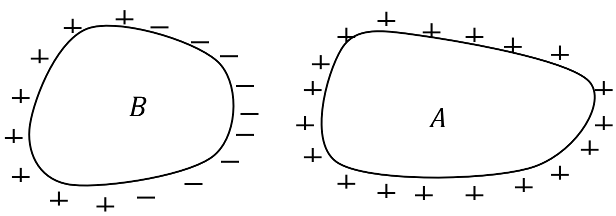
Le potentiel est constant à l'intérieur et sur la surface de la sphère. Calculons le potentiel V de la sphère :

$$V = K\frac{Q}{R} \Longrightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{R}{K} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

5. PHENOMENE D'INFLUENCE

5.1 Influence subie par un conducteur isolé

Soit un conducteur B isolé qui ne porte aucune charge ($Q = 0, V = 0, \vec{E} = \vec{0}$). On approche de B un corps A chargé positivement.



L'action de A sur B se manifeste par l'apparition de charges négatives sur la partie de B proche de A et des charges positives sur la partie la plus éloignée. On dit que le conducteur B est influencé par le conducteur A. Dans ce phénomène, il faut noter que :

- La répartition des charges sur la surface de B est modifiée.
- le conducteur B étant isolé, alors sa charge reste constante égale à sa valeur initiale.

Conclusion : le phénomène d'influence ne modifie pas la charge totale d'un conducteur isolé, mais modifie uniquement la répartition de cette charge sur sa surface et donc son potentiel.

Remarque : si le conducteur B était initialement chargé, il conserve la même charge mais la répartition en surface est modifiée.

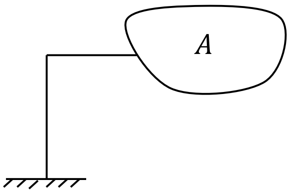
Les charges qui se font face sur deux éléments de surface correspondants sont égales et opposées (théorème de faraday).

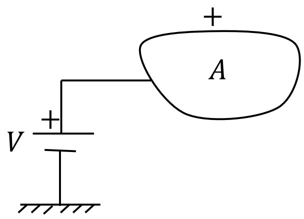
Dans ce cas, l'influence est dite partielle car seule une partie du conducteur B est influencé par le conducteur A.

5.2 Influence subie par un conducteur maintenu à un potentiel constant

Le conducteur B est relié à un générateur qui maintient son potentiel constant ou bien à la terre dont le potentiel est nul.

Lorsqu'on approche de B le corps A chargé positivement, il apparaît que des charges négatives sur B, alors qu'il y'a déplacement des charges positive vers la terre (c'est-à-dire déplacement des électrons de la Terre vers B).



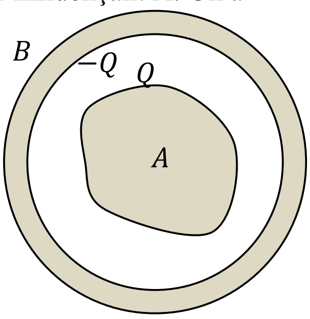


Si le conducteur est relié à un générateur de tension V, la conducteur va se charger et portera une charge de même signe que la borne du générateur à laquelle il est relié. Cette opération s'arrêtera lorsque la tension du conducteur est égale à celle du générateur.

Conclusion : Dans ce cas, le phénomène d'influence ne modifie pas le potentiel du conducteur, mais modifie sa charge totale et la répartition de cette charge.

5.3 L'influence totale

L'influence totale apparaît lorsque le conducteur influencé B entoure le conducteur influençant A. On a le phénomène suivant :



- Il apparaît, par influence totale, une charge Q' = - Q sur la surface intérieure de B.
- La charge de la face extérieure de B dépend de sa charge initiale, et de son état (isolé ou maintenu à un potentiel V constant). On distingue 3 cas :

1èr cas : B isolé et initialement neutre. Puisque la charge totale doit rester nulle, il apparaît sur la face externe la charge +Q.

2ème cas : B isolé et porte initialement une charge Q', alors il apparaît sur sa face externe la charge Q + Q'.

3ème cas : B relié au sol aucune charge n'apparait sur sa face externe.

6. CAPACITES ET COEFFICIENTS D'INFLUENCE D'UN SYSTEME DE n CONDUCTEURS EN EQULIBRE ELECTROSTATIQUE

Considérons n conducteurs portés aux potentiels $V_1, V_2, V_3, \dots\dots, V_n$; et portant les charges $Q_1, Q_2, Q_3, \dots\dots, Q_n$. On montre que ces charges sont des fonctions linéaires des potentiels des conducteurs :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \cdots \dots + C_{1n}V_n$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \cdots \dots + C_{2n}V_n$$

$$\dots\dots$$

$$Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \cdots \ldots\ldots + C_{nn}V_n$$

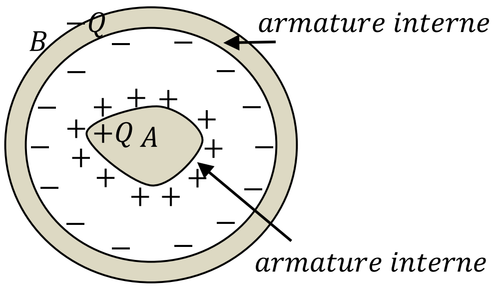
Les coefficients C_{ij} sont les coefficients d'influences entre conducteurs $C_{ij} = C_{ji} < 0$, les coefficients C_{ii} sont les capacités des conducteurs en présence des autres conducteurs $C_{ii} > 0$.

Remarque : La capacité C_{ii} du conducteur i en présence des autres conducteurs est différente de sa capacité C_i lorsqu'il est seul.

Application : deux sphères conductrices en influence.

7. LES CONDENSATEURS

7.1 Définitions



Un condensateur est formé de deux conducteurs en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

On appelle charge du condensateur, la charge Q de son armature interne.

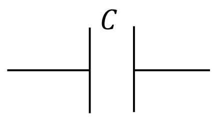
Soient V_1et V_2 les potentiels respectifs des armatures interne et externe.

Le rapport :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Est appelé capacité du condensateur.

Représentation symbolique :



7.2 Calcul de capacités

a. Méthode générale

- On calcul le champ $\vec{E}$ entre les armatures (en utilisant le théorème de Gauss),

- On calcul la circulation du champ d'une armature à l'autre $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.\vec{dl}$.

- Connaissant la charge $Q = \iint_S \sigma dS$, on calcule C qui est égale à :

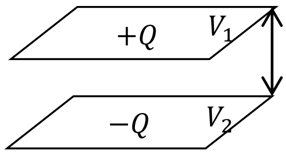
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

b. Exemple : condensateur plan

Il est constitué de deux plans infinis portés aux potentiels V_1 et V_2 et distant de e.

Entre les armatures $\vec{E}$ est uniforme : $\vec{E} = {}^{\sigma}/_{\varepsilon_0}\vec{n}$

Calculons la circulation de $\vec{E}$:



$$\int_1^2 \vec{E}.\vec{dl} = -\int_{V_1}^{V_2} dV \Rightarrow E\ e = V_1 - V_2 \Rightarrow E = \frac{V_1 - V_2}{e}$$

D'autre part une portion du conducteur de surface S porte la charge $Q = \sigma S$, donc :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{V_1 - V_2}{e} \Rightarrow C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

7.3 Groupements de condensateurs

Un condensateur est caractérisé par sa capacité et la d.d.p qu'il peut supporter.

Objectif du groupement de condensateurs :

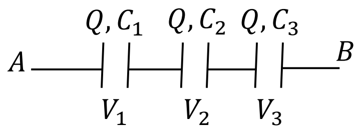
- avoir un condensateur capable de supporter les d.d.p élevées,
- ou avoir un condensateur de capacité très grande**,**

a. Groupement en série

Dans ce groupement, tous les condensateurs portent la même charge Q. La d.d.p entre A et B est la somme des d.d.p aux bornes de chaque condensateur :

$$U = V_A - V_B = V_1 + V_2 + V_3$$

Le condensateur équivalent aura la même charge sous la d.d.p U de l'ensemble en série. Sa capacité C_{eq} est donnée par :



$$V_A - V_B = \frac{Q}{C_{eq}} = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}}$$
$$= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

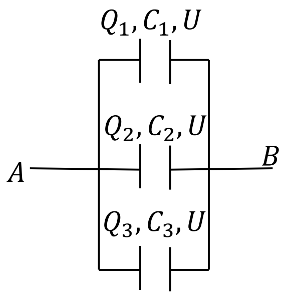
Ce groupement permet ainsi de diviser la d.d.p totale en fractions supportables par chaque élément.

Dans le cas de n conducteurs disposés en série, on a :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n}$$

b. Groupement en parallèle

- Dans ce groupement, tous les condensateurs ont la même d.d.p à leurs bornes.
- Le condensateur équivalent aura une charge égale à la somme des charges des condensateurs : $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ sous la d.d.p $U = V_A - V_B$. Sa capacité C_{eq} est donnée par :



$$Q = C_{eq}U = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1U + C_2U + C_3U = (C_1 + C_2 + C_3)U$$
$$\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Ce groupement permet ainsi d'avoir un condensateur de grande capacité.

Pour condensateurs en parallèle :

$$C_{eq} = \sum_n C_n$$

7.4 Condensateur avec diélectrique

En réalité entre les armatures d'un condensateur il y'a un isolant (solide, liquide ou l'air). L'expérience montre que l'utilisation de l'isolant permet d'augmenter la capacité du condensateur $C = \varepsilon_r C_0$, ou C est la capacité du condensateur avec un isolant entre les armatures, et C_0 sa capacité lorsqu'il n'y a rien entre les armatures « du vide ». La quantité ε_r est sans unité, elle représente la permittivité relative de l'isolant ou constante diélectrique, elle ne dépend que de la nature de l'isolant. On a toujours $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ où ε est la permittivité absolue de l'isolant et ε_0 la permittivité absolue du vide.

Exemples : Valeurs de ε_r pour quelques isolants :

Verres : ε_r = de 4 à 7, mica : ε_r= 8, air : ε_r = 1,00058.

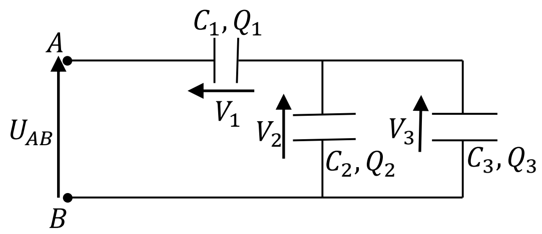
8. EXEMPLES D'APPLICATION

8.1 On relie deux sphères conductrices isolées de rayons R_1 et R_2 $(R_2 < R_1)$ à une générateur de tension U. à l'équilibre, calculer les charges Q_1et Q_2 que vont porter ces deux sphères. Calculer la capacité de chaque sphère.

On place ces deux sphères de telle manière que la distance entre elles soit égale à d, telle que $d \gg R_1, R_2$. Calculer les coefficients d'influence propres et mutuelles (capacités) des ces deux sphères. Que deviennent ces coefficients si $d \to \infty$? Que deviennent ces coefficients si les deux sphères sont reliées par un fil conducteur de longueur égale à d.

8.2 Calculer les capacités d'un condensateur sphérique et cylindrique.

8.3 Soit le groupement de condensateurs de la figure suivante, où $U_{AB} = V_A - V_B$:



- Calculer la capacité équivalente C_{eq} de ce montage.
- Calculer la d.d.p aux bornes de chaque condensateur et la charge portée par chaque condensateur.