

Dans ce problème, l'air est considéré comme un gaz parfait constitué de deux gaz parfaits diatomiques dont les proportions en masse sont de 21% de dioxygène O_2 de masse molaire $M_{O_2} = 32 \text{ g}$ et de 79% de diazote N_2 de masse molaire $M_{N_2} = 28 \text{ g}$.

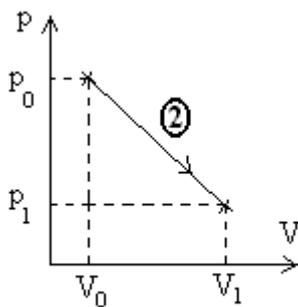
1)a) Montrer que la masse molaire de l'air est égale à $M \approx 29 \text{ g}$.

1)b) En se limitant à des conditions courantes de températures où les variations de la capacité calorifique molaire à pression constante avec la température sont négligeables, montrer que $C_{pM} \approx 29,1 \text{ J.K}^{-1}$ quelques soient les valeurs de P et T ; en déduire la valeur de γ .

1)c) Calculer les expressions de l'énergie interne U , de l'enthalpie H et de l'entropie S de ce gaz parfait.

2) Une mole d'air subit une transformation où il évolue d'un état (P_0, V_0) à un état (P_1, V_1) .

$$P_1 = \frac{P_0}{k}, V_1 = kV_0.$$



2)a) Comparer la température T_0 dans l'état (P_0, V_0) à celle T_1 dans l'état (P_1, V_1) ; en déduire les variations d'énergie interne $\Delta U = U_1 - U_0$ et d'entropie $\Delta S = S_1 - S_0$ en fonction de k .

2)b) On envisage, pour passer de l'état (P_0, V_0) à l'état (P_1, V_1) , deux transformations, une transformation réversible isotherme notée 1, une transformation réversible notée 2 (représentée sur la figure ci-contre) où la pression évolue linéairement de P_0 à P_1 .

Représenter graphiquement la transformation 1 et en déduire que les travaux échangés

W_1 et W_2 sont tels que $W_1 > W_2$ si $k > 1$.

2)c) Calculer W_1 et W_2 [on montrera que, pour la transformation 2, $P = -\frac{P_0}{k} \left(\frac{V}{V_0} - k - 1 \right)$] à partir de l'expression du travail des forces de pression; calculer les quantités de chaleur échangées Q_1 et Q_2 ; montrer qu'il existe une relation simple entre Q_1 et ΔS ; pourquoi n'y a-t-il pas de relation simple entre Q_2 et ΔS ?

2)d) Pour la transformation 2, montrer que la température peut être écrite

$T = \frac{T_0}{k} \left[\frac{V}{V_0} (k+1) - \frac{V^2}{V_0^2} \right]$; calculer, en fonction de k , la température extrême atteinte dans la transformation 2 et la nature de cet extremum.

1)a) $M = 0,79M_{N_2} + 0,21M_{O_2} = 29 \text{ g}$

1)b) $C_{pM} - C_{vM} = R$; dans les conditions courantes de pression et surtout de températures

(entre 150 et 1200 K), $C_{vM} = \frac{5}{2}R$ qui correspond à trois degrés de liberté pour le mouvement de translation et deux degrés de liberté pour le mouvement de rotation de chaque molécule diatomique.

Soit $C_{pM} = \frac{7}{2}R \approx 29,1 \text{ J.K}^{-1}$; $\gamma = C_{pM} / C_{vM} = 1,4$

1)c) $dH = nC_{pM}dT + (h+V)dp$ et $dS = n \frac{C_{pM}}{T}dT + \frac{h}{T}dp$

L'écriture de la condition de Cauchy pour les deux différentielles totales impose les relations :

$$n \left(\frac{\partial C_{pM}}{\partial p} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} (h+V)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$n \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{C_{pM}}{T} \right)_T = \frac{n}{T} \left(\frac{\partial C_{pM}}{\partial T} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{h}{T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p - \frac{h}{T^2} \Rightarrow n \left(\frac{\partial C_{pM}}{\partial T} \right)_T = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p - \frac{h}{T}$$

En comparant, on obtient $\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p - \frac{h}{T}$, soit $h = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$

$$n \left(\frac{\partial C_{pM}}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_p$$

En reportant cette dernière relation, on obtient

A partir de l'équation d'état du gaz parfait $pV = nRT$, on calcule

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{p} \text{ et } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_p = 0$$

Par suite, $h = -\frac{nRT}{p} = -V$ et $\left(\frac{\partial C_{pM}}{\partial p} \right)_T = 0$ (soit C_{pM} ne dépend pas de p).

On introduit ces expressions dans les différentielles de dH et de dS .

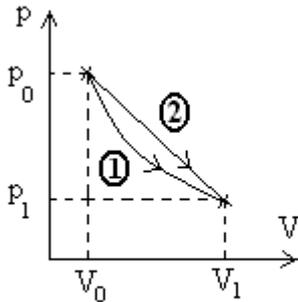
$$dH = nC_{pM}dT \text{ et } dS = n \left(\frac{C_{pM}}{T}dT - R \frac{dp}{p} \right)$$

En intégrant avec $C_{pM} = Cte$,

- $H = nC_{pM}T + H_0$, $U = H - pV = n(C_{pM} - R)T + H_0 = nC_{vM}T + H_0$
- $S = n(C_{pM} \ln T - R \ln p) + S'_0 = n(C_{vM} \ln T + R \ln V) + S_0 = nC_{vM}(\ln p + \gamma \ln V) + S_0''$

2)a) $RT_1 = p_1 V_1 = \frac{P_0}{k} k V_0 = p_0 V_0 = RT_0 \Rightarrow T_1 = T_0$

2)b)



Il s'agit de détentes donc W_1 et W_2 sont négatifs.

En valeur absolue, ces travaux sont représentés par les aires comprises sous leurs représentations graphiques respectives et l'axe des volumes.

$$|W_1| < |W_2| \text{ et algébriquement } W_1 > W_2.$$

2)c) La transformation 1 est isotherme pour un gaz parfait.

$$W_1 = - \int_0^1 p dV = -RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = -p_0 V_0 \ln k$$

suivant transformation à T_0

$$U_1 - U_0 = 0 = W_1 + Q_1; \quad W_1 = -Q_1 = -T_0(S_1 - S_0) = -RT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = -p_0 V_0 \ln k$$

$$p = -\frac{P_0}{k} \left(\frac{V}{V_0} - k - 1 \right)$$

correspond à une évolution linéaire de p respectant les valeurs de l'état 0 et l'état 1.

$$W_2 = - \int_0^1 p dV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{P_0}{k} \left(\frac{V}{V_0} - k - 1 \right) dV = -\frac{P_0 V_0}{2k} (k^2 - 1)$$

$$U_1 - U_0 = 0 = W_2 + Q_2; \quad W_2 = -Q_2 = \frac{P_0 V_0}{2k} (k^2 - 1)$$

Il ne peut y avoir de relation simple entre Q_2 et ΔS suivant la transformation 2 car la température n'est pas constante.

$$2)d) \quad RT = pV = -\frac{p_0}{k} \left(\frac{V}{V_0} - k - 1 \right) V = \frac{RT_0}{kV_0} \left(k + 1 - \frac{V}{V_0} \right) V \quad , \text{ soit } T = \frac{T_0}{k} \left[\frac{V}{V_0} (k + 1) - \frac{V^2}{V_0^2} \right]$$

$$\frac{dT}{dV} = 0 \Rightarrow V = V_0 \frac{k+1}{2} \quad , \text{ soit } T_{ext} = T_0 \frac{(k+1)^2}{4k}$$

$$\frac{(k+1)^2}{4k}$$

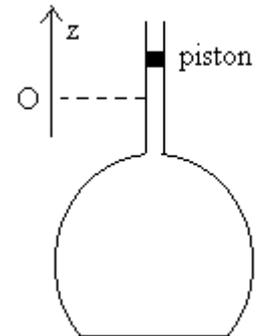
Il s'agit d'un maximum car $\frac{(k+1)^2}{4k}$ est supérieur à 1 quelque soit $k \neq 1$ (le cas $k = 1$ correspond à un état final identique à l'état final c'est à dire à une absence de transformation et n'a donc pas d'intérêt).

11 - On considère un récipient fermé par un piston de masse $m = 10 \text{ g}$ mobile sans

11 - On considère un récipient fermé par un piston de masse $m = 10 \text{ g}$ mobile sans frottements dans le col vertical de section $s = 1 \text{ cm}^2$ d'un récipient.

Le récipient contient n moles de gaz parfait dont on cherche à déterminer le rapport $\gamma = C_p / C_v$.

A l'extérieur, l'air est à pression $P_a = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-2}$. A l'équilibre, le volume intérieur du récipient est $V = 5 \text{ litres}$.



1) Calculer la pression P_i du gaz intérieur à l'équilibre.

2) Le piston est déplacé de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale. Les transformations ultérieures sont quasi-statiques mais assez rapides pour être adiabatiques.

2)1) Décrire la nature des mouvements (de faible amplitude) du piston.

2)2) Soit z la position du piston par rapport à sa position d'équilibre. Ecrire la variation de volume δV du gaz intérieur.

2)3) Trouver une relation entre les variations de volume δV et δP du gaz intérieur (ces variations restent faibles devant respectivement V et P_i).

2)4) En déduire l'équation différentielle du mouvement du piston. Donner l'expression théorique de la période τ du mouvement. Si $\tau = 1,18 \text{ s}$ est la période, calculer γ .

2)5) Que deviendraient ces résultats pour des gaz réels ?

$$1) p_i = p_a + \frac{mg}{s} = 1,01310^5 + \frac{0,01 \times 9,8}{10^{-4}} = (1,013 + 0,01)10^5 \text{ Pa}$$

2)1) Il s'agit d'un mouvement libre créé par un faible déséquilibre à partir d'une position d'équilibre stable \Rightarrow oscillations autour de la position d'équilibre stable

$$2)2) \delta V = sz$$

2)3) La transformation est adiabatique quasi-statique

$$dS = C_v \left(\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta p}{p_i} + \gamma \frac{sz}{V} = 0$$

$$2)4) m \ddot{z} = s \delta p = -\frac{\gamma s^2 p_i}{V} z \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{\gamma s^2 p_i}{mV} z = 0$$

$$\text{Soit } \gamma = \frac{4\pi^2 mV}{\tau^2 s^2 p_i} = 1,386$$

2)5 Autour de la pression atmosphérique normale, les gaz réels se comportent avec une excellente approximation comme des gaz parfaits.

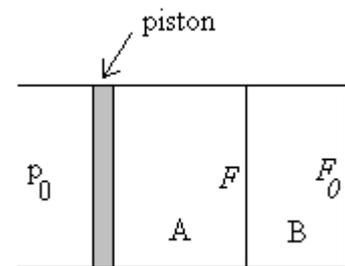
Donc, traiter le problème avec des équations d'état de gaz réels n'est pas justifié.

9 – Un cylindre horizontal est fermé à l’une de ses extrémités par une paroi fixe F_0 et à l’autre l’extrémité par un piston qui peut coulisser sans frottement le long du cylindre.

Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe F .

Sur la face extérieure du piston s’exerce la pression

atmosphérique P_0 qu’on suppose uniforme et constante.



1) Dans la situation initiale le compartiment A de volume $V_A = V_0$ contient un gaz parfait diatomique à température T_0 , le compartiment B de volume V_B est vide. Calculer le nombre n de moles dans le cylindre.

2) Les parois du cylindre et le piston sont imperméables à la chaleur et de capacités calorifiques négligeables.

On perce un orifice dans la paroi fixe F .

Le volume V_B est suffisamment grand pour que la pression finale soit inférieure à P_0 .

2)1) En déduire, dans l’état final, le volume du compartiment A.

2)2) Calculer par deux méthodes différentes le travail W_1 échangé avec l’extérieur par le gaz.

En déduire la température finale T_1 , la pression finale P_1 du gaz et le volume minimal $V_B = V_{Bm}$ pour que la pression finale P_1 reste inférieure à P_0 .

2)3) Calculer l’entropie S_{1c} créée. Le résultat est-il conforme au second principe de la Thermodynamique ?

3) On revient aux conditions définies en 1), les parois du cylindre et le piston étant imperméables à la chaleur et de capacités calorifiques négligeables.

V_B est maintenant inférieur à V_{Bm} et la pression finale du gaz sera P_0 après avoir percé l’orifice.

3)1) Calculer par deux méthodes différentes le travail W_2 échangé avec l’extérieur par le gaz.

En déduire la température finale T_2 .

3)2) Calculer l’entropie S_{2c} créée. Le résultat est-il conforme au second principe de la Thermodynamique ?

4) On revient aux conditions initiales et on bloque le piston. Que se passe-t-il lorsque l’on perce l’orifice ? Conclusions.

1) Il y a équilibre mécanique entre l'extérieur et le compartiment A.

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$$

2)1) $V_A = 0$

2)2) $W_1 = P_0 V_0 = \Delta U_1 = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$ (pas d'échanges de chaleur)

Soit $T_1 = \gamma T_0$ avec $\gamma = 7/5$ (gaz diatomique)

$$P_1 V_B = n R T_1 = \frac{P_0 V_0}{R T_0} R \gamma T_0 = \gamma P_0 V_0$$

$$V_B = \gamma V_0 \frac{P_0}{P_1} \geq \gamma V_0 = V_{Bm} \quad \text{puisque } P_1 \leq P_0$$

2)3) $\Delta S_1 = n C_{vm} \left[\ln \frac{T_1}{T_0} + (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_0} \right]$ est supérieur à 0 car $T_1 > T_0$ et $V_B > V_0$

La transformation est adiabatique irréversible \Rightarrow 2d principe : $\Delta S_1 = S_{e1} + S_{c1} = S_{c1} > 0$

3)1) $W_2 = P_0 (V_0 - V_A) = \Delta U_2 = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_0)$ (pas d'échanges de chaleur)

$$P_0 (V_A + V_B) = n R T_2 \Leftrightarrow T_2 = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{V_B}{V_0} \right)$$

3)2) $\Delta S_2 = n C_{pM} \left[\ln \frac{T_2}{T_0} + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \ln \frac{P_0}{P_0} \right] = n C_{pM} \ln \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{V_B}{V_0} \right) > 0$

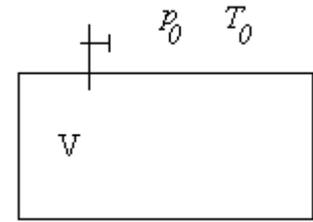
La transformation est adiabatique irréversible \Rightarrow 2d principe : $\Delta S_2 = S_{e2} + S_{c2} = S_{c2} > 0$

4) Il n'y a plus de travail échangé, l'énergie interne reste constante et la température ne change pas : en fait, on est dans les conditions de la détente de Joule-Gay Lussac.

8 - Un réservoir indéformable de volume $V = 50 \text{ l}$ dont les parois sont adiabatiques est

Muni d'un robinet R permettant de le mettre en communication avec l'air atmosphérique extérieur.

On assimilera ce dernier à un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g}$, de $\gamma = 1,40$. Justifier ces valeurs.



1) Le réservoir étant rempli d'air à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ dont la pression est $p_1 = 1,055 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Calculer la masse m_1 d'air qu'il contient.

2) On ouvre brusquement le robinet R de manière à ramener la pression de l'air dans le réservoir à la valeur de la pression atmosphérique $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Expliquer pourquoi on peut considérer que l'air restant dans le réservoir s'est détendu de manière adiabatique quasi-statique. Calculer la température T_2 et la masse m_2 de l'air restant dans le réservoir à la fin de cette détente.

3) On suppose maintenant que l'on a fait le vide dans le réservoir. On ouvre brusquement le robinet R, l'air pénètre dans le réservoir jusqu'à ce que la pression soit égale à la pression extérieure $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

3)1) Expliquer la nature de cette opération et donner une expression littérale du travail W échangé au cours de l'opération (pour cela, on considérera un système constitué de la quantité d'air entrant dans le réservoir).

3)2) Calculer la température T_3 de l'air ainsi que le travail W .

4) Le robinet R étant fermé on établit le contact thermique entre l'intérieur et l'extérieur du réservoir en enlevant l'isolant qui protégeait les parois. La température de l'air passe alors de T_3 à T_0 . Calculer la chaleur et le travail échangés.

$$1) \quad m_1 = \frac{M p_1 V}{R T_0} = 61,3 \text{ g}$$

2) La différence de pression, avant ouverture du robinet, entre air intérieur du réservoir et extérieur est faible \Rightarrow transformation quasi-statique.

La détente est rapide, les échanges de chaleur n'ont pas le temps de se faire \Rightarrow adiabatique.

$$dS = 0 = C_p \left(\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} \right) \Rightarrow \frac{T_2 - T_0}{T_0} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{p_0 - p_1}{p_1} = 0$$

$$T_2 = T_0 \left(1 - \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{p_0 - p_1}{p_1} \right) = 300 \left(1 - \frac{2 \times 0,042}{7 \times 1,055} \right) = 296,6 \text{ K}$$

$$m_2 = \frac{M p_0 V}{R T_2} = 59,6 \text{ g}$$

3)1) La transformation est irréversible, la pression P_0 poussant une certaine quantité d'air de masse m_3 initialement à l'extérieur du réservoir et contenue dans un volume V_0 .

$$W = -p_0 (0 - V_0) = p_0 V_0 = \frac{m_3}{M} R T_0$$

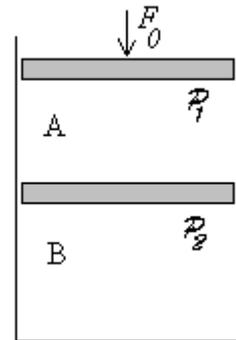
$$3)2) \quad U_3 - U_0 = m_3 \frac{C_{vM}}{M} (T_3 - T_0) = p_0 V_0 = \frac{m_3}{M} R T_0$$

$$\text{Soit} \quad T_3 = \frac{C_{vM} + R}{C_{vM}} T_0 = \frac{C_{pM}}{C_{vM}} T_0 = \gamma T_0$$

$$4) \quad W = 0; \quad U_4 - U_3 = m_3 \frac{C_{vM}}{M} (T_0 - T_3) = \frac{m_3}{M} R T_0 = Q$$

7 - Un cylindre de section $S = 10^3 \text{ cm}^2$ fermé par un piston \mathcal{P}_1 de masse négligeable est

Divisé en deux compartiments A et B au moyen d'une paroi mobile \mathcal{P}_2 de masse négligeable pouvant se déplacer librement. Les parois du cylindre et du piston \mathcal{P}_1 sont adiabatiques alors que la paroi \mathcal{P}_2 initialement adiabatique peut être rendue conductrice de la chaleur au moyen d'un dispositif approprié. Dans l'état initial le compartiment A contient 2 moles d'hélium (gaz monoatomique), le compartiment B contient 1 mole d'oxygène (diatomique). Les deux gaz que l'on supposera parfaits sont à la même température $T_0 = 300 \text{ K}$



et le système est en équilibre sous l'action d'une force extérieure $F_0 = 10^4 \text{ N}$ s'exerçant sur \mathcal{P}_1 .

1) Calculer les volumes V_A^0 et V_B^0 occupés par chaque gaz.

2) On modifie lentement la force extérieure F_0 jusqu'à la valeur $F_1 = 10^5 \text{ N}$. Calculer les volumes V_A et V_B occupés par chaque gaz ainsi que la température T_A et T_B . Quel est le travail W échangé. Quels sont les travaux W_A et W_B échangés par chaque gaz.

3) Le système étant dans l'état initial (F_0, T_0) on rend la paroi \mathcal{P}_2 conductrice et on réalise à nouveau une compression infiniment lente de F_0 à F_1 .

Que peut-on dire des transformations subies par chaque gaz et par le système complet ?
Quelle relation lie les paramètres température et pression p au cours de l'évolution ?

Calculer la température d'équilibre finale T_f ainsi que les travaux W_A' , W_B' et W' échangés par chaque gaz et par le système dans son ensemble. Comparer ces résultats à ceux en 2).

4) Le système étant dans l'état initial (F_0, T_0) on pratique une ouverture dans la paroi \mathcal{P}_2 , les deux gaz se mélangent, la paroi \mathcal{P}_2 est déposée au fond du cylindre et ne joue plus aucun rôle.

On réalise alors la compression infiniment lente de F_0 à F_1 .

Que peut-on dire des deux phases successives de l'évolution ?

Que peut-on dire de la température d'équilibre finale et du travail échangé par le système ?

$$1) V_A^0 = n_A \frac{RT_0}{P_0} = \frac{2RT_0 S}{F_0} ; V_B^0 = n_B \frac{RT_0}{P_0} = \frac{RT_0 S}{F_0}$$

2) Les deux compartiments subissent une transformation adiabatique réversible de $P_0 = \frac{F_0}{S}$ à $P_1 = \frac{F_1}{S}$

$$\gamma_A = 5/3 ; \frac{1-\gamma_A}{\gamma_A} = -\frac{2}{5} ; \gamma_B = 7/5 ; \frac{1-\gamma_B}{\gamma_B} = -\frac{2}{7}$$

$$V_A = \frac{2RT_0 S}{F_0} \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{3/5} = 12,5 \text{ l} ; V_B = \frac{RT_0 S}{F_0} \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{5/7} = 4,8 \text{ l}$$

$$T_A = T_0 \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{\frac{1-\gamma_A}{\gamma_A}} = 753,6 \text{ K} ; T_B = T_0 \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{\frac{1-\gamma_B}{\gamma_B}} = 579,2 \text{ K}$$

$$W_A = n_A C_{VA} (T_A - T_0) = 3R(T_A - T_0) = 11310 \text{ J}$$

$$W_B = n_B C_{VB} (T_B - T_0) = \frac{5}{2} R(T_B - T_0) = 5800 \text{ J}$$

3) La compression est adiabatique réversible (= isentropique) pour l'ensemble des 2 compartiments qui restent, à chaque instant, en équilibre mécanique et en équilibre thermique.

$$\begin{aligned} dS_{A+B} = 0 &= dS_A + dS_B = n_A C_{pMA} \frac{dT}{T} - n_A R \frac{dp}{p} + n_B C_{pMB} \frac{dT}{T} - n_B R \frac{dp}{p} \\ &= 5R \frac{dT}{T} - 2R \frac{dp}{p} + \frac{7}{2} R \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = R \left(\frac{17}{2} \frac{dT}{T} - 3 \frac{dp}{p} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow T p^{-6/17} = \text{Cte}$$

$$T_f = T_0 \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^{-6/17} = 676,2 \text{ K}$$

L'équilibre thermique et l'équilibre mécanique sont réalisés à chaque instant entre les deux compartiments, par suite à un instant quelconque de la transformation

$$V_A' = \frac{n_A RT}{p} \text{ et } V_B' = \frac{n_B RT}{p}, \text{ soit } \frac{V_A'}{n_A} = \frac{V_B'}{n_B}$$

$$\delta W'_A = -pdV'_A \text{ et } \delta W'_B = -pdV'_B = -p \frac{n_B}{n_A} dV'_A = \frac{n_B}{n_A} \delta W'_A, \text{ soit } \frac{W'_A}{n_A} = \frac{W'_B}{n_B}$$

$$\begin{aligned} \Delta U'_{A+B} &= (n_A C_{VM A} + n_B C_{VM B})(T_f - T_0) = \frac{11}{2} R(T_f - T_0) = 17202 \text{ J} \\ &= W'_A + Q'_A + W'_B + Q'_B = W'_A + W'_B = W' \end{aligned}$$

$$W'_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} W' = \frac{2}{3} W' = 11468 \text{ J}$$

$$W'_B = \frac{n_B}{n_A + n_B} W' = \frac{1}{3} W' = 5734 \text{ J}$$

4) La première phase se traduit par un mélange des gaz qui ne changent pas de température ou de pression puisqu'initialement ils ont même température et même pression. C'est une opération qui se traduit par une entropie d'irréversibilité de mélange.

$$\begin{aligned} \Delta S_{A+B} = S_c &= \Delta S_A + \Delta S_B = -n_A R \ln \frac{P_{pA}}{P_0} - n_B R \ln \frac{P_{pB}}{P_0} \\ &= -n_A R \ln \frac{n_A}{n_A + n_B} - n_B R \ln \frac{n_B}{n_A + n_B} = R(2 \ln \frac{3}{2} + \ln 3) = 15,9 \text{ J/K} \end{aligned}$$

La deuxième opération est une compression adiabatique réversible pour l'ensemble des deux gaz \Rightarrow même raisonnement qu'à la question 3)

6 - On désire refroidir une mole de gaz parfait diatomique en lui faisant subir une suite de compressions isothermes suivies de détentes adiabatiques. Ce gaz est contenu dans un cylindre fermé par un piston glissant sans frottement. Initialement, le gaz est à la température $T_0 = 300 \text{ K}$ et sa pression est $P_0 = 1 \text{ atm}$.

Justifier la valeur de $\gamma = C_p / C_v = 1,40$.

1) Dans une première opération on comprime le gaz de manière isotherme réversible jusqu'à la pression $P_1 = 3 \text{ atm}$ puis on le détend de manière adiabatique réversible jusqu'à P_0 .

1)1) Quelle est la température T_1 en fin d'évolution adiabatique ?

1)2) Calculer la quantité de chaleur Q_i et le travail W_i mis en jeu au cours de l'évolution isotherme, ainsi que le travail W_a mis en jeu au cours de l'évolution adiabatique. En déduire le travail total W reçu par le gaz au cours de cette première opération.

Calculer la variation d'entropie ΔS_{ir} au cours de cette première opération.

2) Le gaz étant dans l'état T_1, P_0 on recommence la même opération (compression isotherme réversible jusqu'à $P_1 = 3 \text{ atm}$, puis détente adiabatique réversible jusqu'à P_0).

2)1) Donner l'expression de la température T_n obtenue à la fin de la $n^{\text{ième}}$ opération.

2)2) Pour quelle valeur de n le gaz atteint-il une température T_n inférieure ou égale à 100 K ?

2)3) Calculer la variation d'entropie ΔS_{ir} après n opérations.

3) On suppose maintenant qu'au cours de chaque opération, la compression isotherme et la détente adiabatique sont irréversibles (pour cela, on soumet le piston à la pression extérieure P_1 tout au long de l'évolution isotherme puis on le lâche de façon qu'au cours de la détente adiabatique de P_1 à P_0 la pression appliquée soit constamment la pression atmosphérique P_0).

Calculer le travail W_i' et la chaleur Q_i' mis en jeu au cours de la première compression isotherme. Comparer à W_i et Q_i trouvés en 1)b), expliquer la différence.

Calculer la température T_1' obtenue à la fin de la première détente adiabatique ainsi que le travail W_a' échangé par le gaz au cours de cette détente. Comparer ces résultats à ceux obtenus quand la détente adiabatique était réversible. Conclusions ?

Calculer la variation d'entropie ΔS_{ir} après la première compression isotherme et la première détente adiabatique. Calculer les entropies créées dans la compression isotherme et dans la détente adiabatique.

1)1) La détente est adiabatique réversible : elle est isentropique (conséquence directe du 2d principe).

$$\begin{aligned} dS &= C_{vm} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = C_{vm} \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \right] \\ &= C_{pm} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = C_{pm} \left[\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} \right] \end{aligned}$$

$$S = C_{vm} \text{Ln}[TV^{\gamma-1}] + S_0$$

$S = Cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte$ soit aussi $pV^\gamma = Cte$ ou $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$ en introduisant dans la première expression l'équation d'état $pV = RT$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

A.N. $T_1 = 219,2 \text{ K}$

1)2) réversible \Rightarrow il y a équilibre mécanique entre la pression intérieure (qui est uniforme à chaque instant) et la pression extérieure $p_e = p$; les pressions évoluent de manière " très progressive " de p_0 à p_1 de façon que la pression du système puisse être uniforme à chaque instant.

$$\delta W_i = -p_e dV = -pdV$$

$$W_i = - \int_0^1 p dV = -RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = -RT_0 \text{Ln} \frac{V_1}{V_0} = RT_0 \text{Ln} \frac{p_1}{p_0} > 0 \text{ (compression } p_1 > p_0)$$

suivant la transformation (ici isotherme)

A.N. $W_i = 2740 \text{ J}$

$\Delta U_1 = 0$ (conséquence de la première loi de Joule : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température)

$$\Delta U_1 = W_1 + Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = -W_1 = -2740 \text{ J}$$

$$\delta W_a = -p_e dV = -pdV$$

$$W_a = - \int_0^1 p dV = -p_0 V_0^\gamma \int_{V_1}^{V_{al}} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} [V_{al}^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}] = \frac{1}{\gamma - 1} [p_0 V_{al} - p_1 V_1]$$

suivant la transformation (ici adiabatique)

$$W_a = \frac{R}{\gamma - 1} [T_1 - T_0] = C_{VM} [T_1 - T_0]$$

Soit

Ce résultat peut être établi directement (démonstration beaucoup plus élégante) par application du premier principe.

$$\Delta U_a = C_{VM} [T_1 - T_0] = W_a + Q_a = W_a \text{ puisque la transformation est adiabatique.}$$

$$\text{A.N. } \gamma = \frac{C_{pM}}{C_{VM}} \text{ et } C_{pM} - C_{VM} = R \Rightarrow C_{VM} = \frac{R}{\gamma - 1} ; W_a = -1680 J$$

$$W = W_i + W_a = 1060 J$$

$$\Delta S_{lr} = \Delta S_{lr} + \Delta S_{lar} = \Delta S_{lr} = R \ln \frac{V_1}{V_0} = -R \ln \frac{p_1}{p_0} \text{ ne dépend que du rapport de compression (indépendant du niveau de température)}$$

$$\text{A.N. } \Delta S_{lr} = -9,1 J / K$$

$$2)1) T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2^{1-\gamma}}{\gamma}} ; T_n = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{n^{1-\gamma}}{\gamma}}$$

$$2)2) T_n > 100 K \Rightarrow n > \frac{\gamma \ln(100/T_0)}{1-\gamma \ln(p_1/p_0)} = 3,5 \text{ soit } n = 4$$

$$2)3) \Delta S_{nr} = -n R \ln \frac{p_1}{p_0} = -9,1 n J / K$$

$$3) \delta W_i' = -p_e dV = -p_1 dV \Rightarrow W_i' = -p_1 (V_1 - V_0) = R T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right) \text{ puisque } p_1 V_1 = p_0 V_0 = R T_0$$

$$\Delta U_1' = 0 = W_i' + Q_i' \text{ A.N. } W_i' = -Q_i' = 4988 J$$

L'opérateur extérieur fournit beaucoup plus de travail dans une compression isotherme irréversible que dans une compression isotherme réversible.

$$\delta W_a' = -p_0 dV \Rightarrow W_{13} = -p_0 (V_{al}' - V_1)$$

$$W'_a = \Delta U'_a = C_{VM}(T'_1 - T_0)$$

$$\text{Or } p_1 V_1 = RT_0 ; p_0 V'_{a1} = RT'_1$$

$$\text{Par suite } C_{VM}(T'_1 - T_0) = -RT'_1 + RT_0 \frac{p_0}{p_1} \quad T'_1 = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{p_0}{p_1} \right]$$

A.N. $T'_1 = 242,9 \text{ K}$ La température diminue moins dans la détente adiabatique irréversible

$$\Delta S'_{1i} = -R \ln \frac{p_1}{p_0} ; \quad \Delta S'_{1a} = C_{pM} \ln \left[\frac{1 + (\gamma - 1) \frac{p_0}{p_1}}{\gamma} \right] - R \ln \frac{p_0}{p_1}$$

$$\Delta S'_1 = \Delta S'_{1i} + \Delta S'_{1a} = C_{pM} \ln \left[\frac{1 + (\gamma - 1) \frac{p_0}{p_1}}{\gamma} \right] \quad \text{A.N. } \Delta S'_1 = -6,15 \text{ J/K}$$

3 - On considère une mole de gaz parfait diatomique initialement dans l'état 0 ($p_0 = 1 \text{ atm}$; $T_0 = 273 \text{ K}$; V_0).

On amène ce gaz dans l'état 1 ($p_1 = 10 \text{ atm}$; T_1 ; V_1) de deux manières différentes :

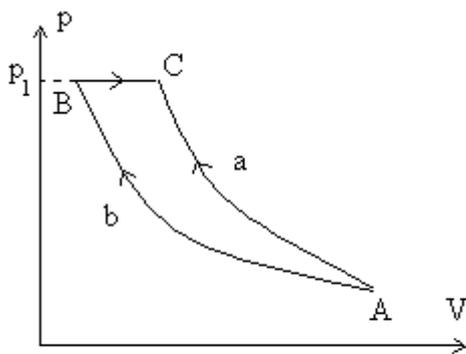
a / par compression adiabatique réversible,

b / par compression isotherme réversible jusqu'à la pression $p_1 = 10 \text{ atm}$ puis échauffement à pression constante jusqu'à la température T_1 .

1) Représenter les évolutions a / et b / sur un diagramme (p en ordonnées, V en abscisse)

2) Calculer les travaux W_a , W_b et les quantités de chaleur Q_a , Q_b au cours de chacune des évolutions. Conclusions.

1)



2)a) la compression a/ est adiabatique réversible : elle est isentropique (conséquence directe du 2d principe).

$$dS = nC_{vm} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = nC_{vm} \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \right]$$

$$S = nC_{vm} \ln[TV^{\gamma-1}] + S_0$$

$S = Cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte$ soit aussi $pV^\gamma = Cte$ ou $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$ en introduisant dans la première expression l'équation d'état $pV = nRT$

$$V_1 = V_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{1/\gamma} \quad \text{et} \quad T_1 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

A.N. Le gaz parfait est diatomique aux températures ordinaires $\Rightarrow \gamma = 1,4$

$$V_0 = \frac{RT_0}{P_0} = 22,4 \text{ l} ; V_1 = 4,3 \text{ l} ; T_1 = 527 \text{ K}$$

$$\delta W_a = -p_e dV = -p dV$$

$$W_a = - \int_0^1 p dV = -p_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_0 V_0^\gamma}{\gamma - 1} [V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}] = \frac{1}{\gamma - 1} [p_1 V_1 - p_0 V_0]$$

suivant la transformation (ici adiabatique)

$$\text{Soit } W_a = \frac{nR}{\gamma - 1} [T_1 - T_0] = nC_{VM} [T_1 - T_0]$$

Ce résultat peut être établi directement (démonstration beaucoup plus élégante) par application du premier principe.

$$\Delta U_a = nC_{VM} [T_1 - T_0] = W_a + Q_a = W_a \text{ puisque la transformation est adiabatique.}$$

$$\text{A.N. } C_{VM} = \frac{5}{2} R \text{ (gaz diatomique aux températures ordinaires)}$$

$$W_a = 5280 \text{ J}$$

2)b) La compression b/ est isotherme (AB) puis isobare (BC)

$$\delta W_{AB} = -p_e dV = -p dV$$

$$W_{AB} = - \int_A^B p dV = -RT_0 \int_{V_0}^{V_B} \frac{dV}{V} = -RT_0 \ln \frac{V_B}{V_0} = RT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} > 0 \text{ (compression } P_1 > P_0)$$

suivant la transformation (ici isotherme)

$$\Delta U_A^B = 0 \text{ (conséquence de la première loi de Joule : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température)}$$

$$\Delta U_A^B = W_{AB} + Q_{AB} = 0$$

De B à C, la transformation est isobare.

$$\Delta H_B^c = \Delta(U + p_1 V)_B^c = W_{BC} + Q_{BC} + p_1(V_C - V_B) = Q_{BC} \text{ où}$$

$$W_{BC} = -p_1(V_C - V_B) = R(T_0 - T_1)$$

$$Q_{BC} = C_{pM}(T_1 - T_0)$$

$$W_b = W_{AB} + W_{BC} = RT_0 \ln \frac{p_1}{p_0} + R(T_0 - T_1)$$

$$Q_b = Q_{AB} + Q_{BC} = -RT_0 \ln \frac{p_1}{p_0} + C_{pM}(T_1 - T_0)$$

Remarque : $W_b + Q_b = \Delta U_A^c = C_{vM}(T_1 - T_0)$

A.N. $W_b = 3114J$; $Q_b = 2165J$

2 - Une masse d'air (assimilé à un gaz parfait) $m = 122 \text{ g}$ occupe un volume $V_0 = 100 \text{ l}$ la pression atmosphérique $P_0 = 1 \text{ atm}$ et à la température $t_0 = 15^\circ \text{C}$. On la comprime par une opération réversible jusqu'à une pression $P_1 = 20 \text{ atm}$.

1) En supposant que, pendant cette compression, la température du gaz soit maintenue constante, calculer le travail échangé pour effectuer la compression. Calculer la variation d'énergie interne et la quantité de chaleur échangée pendant cette compression.

2) En supposant que la compression soit faite de manière adiabatique, calculer le volume final et la température finale de l'air. Calculer le travail échangé, montrer qu'il s'exprime en fonction des températures finale et initiale. Retrouver ce résultat par la considération de l'énergie interne.

3) On comprime adiabatiquement le gaz, en partant du même état initial, jusqu'à une pression P' , puis on le laisse refroidir sans changer son volume jusqu'à la température ambiante t_0 .

On veut, après refroidissement, obtenir de l'air à la pression $P_1 = 20 \text{ atm}$.

Calculer la pression P' , le travail échangé au cours de la compression adiabatique, ainsi que la chaleur échangée pendant le refroidissement.

A.N. $\gamma = 1,40$; $\overline{C_v} = 0,18 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

1) réversible \Leftrightarrow il y a équilibre mécanique entre la pression intérieure (qui est uniforme à chaque instant) et la pression extérieure $P_e = P$; les pressions évoluent de manière " très progressive " de P_0 à P_1 de façon que la pression du système puisse être uniforme à chaque instant.

$$\delta W_T = -p_e dV = -p dV$$

$$W_T = - \int_0^1 p dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} > 0 \text{ (compression } P_1 > P_0)$$

suivant la transformation (ici isotherme)

A.N. $W_T = 30176 \text{ J}$

$\Delta U_T = 0$ (conséquence de la première loi de Joule : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température)

$$\Delta U_T = W_T + Q_T = 0 \Rightarrow Q_T = -W_T = -30176 \text{ J}$$

2) La compression est adiabatique réversible : elle est isentropique (conséquence directe du 2d principe).

$$dS = nC_{vm} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = nC_{vm} \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} \right]$$

$$S = nC_{vm} \ln[TV^{\gamma-1}] + S_0$$

$S = Cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte$ soit aussi $pV^\gamma = Cte$ ou $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Cte$ en introduisant dans la première expression l'équation d'état $pV = nRT$

$$V_1 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{1/\gamma} \quad \text{et} \quad T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

A.N. $V_1 = 11,8l$; $T_1 = 678K$

$$\delta W_a = -p_e dV = -pdV$$

$$W_a = - \int_0^1 pdV = -p_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_0 V_0^\gamma}{\gamma - 1} [V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}] = \frac{1}{\gamma - 1} [p_1 V_1 - p_0 V_0]$$

suivant la transformation (ici adiabatique)

$$\text{Soit } W_a = \frac{nR}{\gamma - 1} [T_1 - T_0] = nC_{vm} [T_1 - T_0]$$

Ce résultat peut être établi directement (démonstration beaucoup plus élégante) par application du premier principe.

$$\Delta U_a = nC_{vm} [T_1 - T_0] = W_a + Q_a = W_a \text{ puisque la transformation est adiabatique.}$$

A.N. $\Delta U_a = 35800J$

$$3) \quad T' = T_0 \left(\frac{P_0}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{T'} = \frac{P_0}{T_0} \Rightarrow P' (P')^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (P')^{1/\gamma} = P_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\text{soit } P' = P_0^\gamma P_0^{1-\gamma} \quad \text{et} \quad T' = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\gamma-1}$$

Le travail pendant la compression adiabatique est égale à :

$$W'_a = \Delta U'_a = nC_{vm} (T' - T_0)$$

Pendant le refroidissement isochore (pas d'échange de travail), la quantité de chaleur est égale à :

$$Q_y = \Delta U_y = nC_{vm} (T_0 - T') = -W'_a$$

A.N. $p' = 66,3 \text{ atm}$; $T' = 954,6 \text{ K}$; $W'_a = -Q'_v = 61190 \text{ J}$

– On considère un gaz parfait pour lequel $C_{vM}(T) = Cte = C_{vM}$.

1) Calculer l'énergie interne U et l'entropie S . On exprimera S avec les trois couples de variables (T, V) , (T, p) et (p, V) .

2) Comment sont affectés les résultats des questions 1) et 2) si C_{vM} dépend de la température.

3)a) Montrer que dans le cas d'une transformation réversible isotherme à la température T_0 de la pression P_0 à la pression P_1 , on peut calculer les quantités de travail et de chaleur échangées par le gaz parfait par deux méthodes différentes.

3)b) Comment pourrait-on calculer l'entropie créée S_c dans le cas d'une transformation isotherme irréversible à température T_0 , la pression P_1 étant appliquée brutalement sur la face extérieure du piston.

3)c) Comparer travail de compression isotherme réversible et irréversible. Comparer travail de détente isotherme réversible et irréversible. On pourra prendre à titre d'exemple

$$p_0 = 1 \text{ atm} \text{ et } p_1 = 10 \text{ atm}$$

$$1) \quad dU = nC_{vM}dT + (l - p)dV \quad \text{et} \quad dS = n\frac{C_{vM}}{T}dT + \frac{l}{T}dV$$

L'écriture de la condition de Cauchy pour les deux différentielles totales impose les relations :

$$n\left(\frac{\partial C_{vM}}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}(l - p)_V = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$n\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{C_{vM}}{T}\right)_T = \frac{n}{T}\left(\frac{\partial C_{vM}}{\partial T}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{l}{T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \frac{l}{T^2} \Leftrightarrow n\left(\frac{\partial C_{vM}}{\partial T}\right)_T = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \frac{l}{T}$$

En comparant, on obtient $\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_V - \frac{l}{T}$, soit $l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

En reportant cette dernière relation, on obtient $n\left(\frac{\partial C_{vM}}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$

A partir de l'équation d'état du gaz parfait $pV = nRT$, on calcule

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V} \text{ et } \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0$$

Par suite, $l = \frac{nRT}{V} = p$ et $\left(\frac{\partial C_{vM}}{\partial V}\right)_T = 0$ (soit C_{vM} ne dépend pas de V).

On introduit ces expressions dans les différentielles de dU et de dS .

$$dU = nC_{vM}dT \text{ et } dS = n\left(\frac{C_{vM}}{T}dT + R\frac{dV}{V}\right)$$

En intégrant avec $C_{vM} = Cte$,

- $U = nC_{vM}T + U_0$,
- $S = n(C_{vM}\ln T + R\ln V) + S_0 = n(C_{pM}\ln T - R\ln p) + S_0 = nC_{vM}(\ln p + \gamma \ln V) + S_0$

2) Les résultats ne sont affectés que par l'intégration. Souvent, on se limite pour une plage de températures à des dépendances avec la température linéaires, de type $C_{vM} = a + bT$ et l'intégration ne pose pas problème.

3)a) On peut faire le calcul direct de W .

Il y a équilibre mécanique entre la pression intérieure (qui est uniforme à chaque instant) et la pression extérieure $P_e = P$; les pressions évoluent de manière "très progressive" de P_0 à P_1 de façon que la pression du système puisse être uniforme à chaque instant.

$$\delta W_r = -p_e dV = -pdV = -\delta Q_r$$

$$W_r = -\int_0^1 pdV = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = nRT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} > 0 = -Q_r$$

suivant la transformation (ici isotherme)

On peut faire le calcul direct de Q .

$$\delta Q_r = T_0 dS = T_0 nR \frac{dV}{V} = -\delta W_r$$

La transformation est réversible isotherme

La suite du calcul est identique à celui fait à partir de δW_r .

$$3)b) S_e = \Delta S - \frac{Q_i}{T_0} = nR \ln \frac{V_1}{V_0} - \frac{Q_i}{T_0} = -nR \ln \frac{P_1}{P_0} - \frac{Q_i}{T_0}$$

Le calcul de Q_i ne peut se faire qu'à partir de $Q_i = \Delta U - W_i = -W_i$

$$\delta W_i = -p_e dV = -P_1 dV \Rightarrow W_i = -P_1(V_1 - V_0) = nRT_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - 1\right)$$

$$S_c = nR \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 - \ln \frac{p_1}{p_0} \right)$$

On montre, sans peine, que S_c est positif quelques soient p_1 et p_0 .

3)c)

Compression $p_1 = 10 p_0$

$$W_r^c = nRT_0 \ln \frac{p_1}{p_0} = 2,3 nRT_0 \quad ; \quad W_i^c = nRT_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) = 9 nRT_0$$

Détente $p_1 = 10 p_0$

Pour obtenir les résultats, il convient d'inverser p_0 et p_1 dans les formules de compression.

$$W_r^d = nRT_0 \ln \frac{p_0}{p_1} = -2,3 nRT_0 \quad ; \quad W_i^d = nRT_0 \left(\frac{p_0}{p_1} - 1 \right) = -0,9 nRT_0$$

14 - Dans ce problème, l'air est considéré comme un gaz parfait constitué de deux gaz parfaits diatomiques dont les proportions en masse sont de 21% de dioxygène O_2 de masse molaire $M_{O_2} = 32 \text{ g}$ et de 79% de diazote N_2 de masse molaire $M_{N_2} = 28 \text{ g}$.

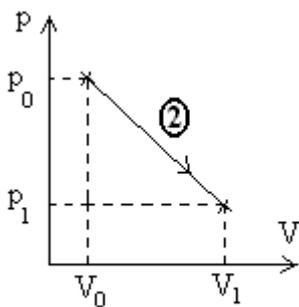
1)a) Montrer que la masse molaire de l'air est égale à $M \approx 29 \text{ g}$.

1)b) En se limitant à des conditions courantes de températures où les variations de la capacité calorifique molaire à pression constante avec la température sont négligeables, montrer que $C_{pM} \approx 29,1 \text{ J.K}^{-1}$ quelques soient les valeurs de P et T ; en déduire la valeur de γ .

1)c) Calculer les expressions de l'énergie interne U , de l'enthalpie H et de l'entropie S de ce gaz parfait.

2) Une mole d'air subit une transformation où il évolue d'un état (P_0, V_0) à un état (P_1, V_1) .

$$P_1 = \frac{P_0}{k}, V_1 = kV_0.$$



2)a) Comparer la température T_0 dans l'état (P_0, V_0) à celle T_1 dans l'état (P_1, V_1) ; en déduire les variations d'énergie interne $\Delta U = U_1 - U_0$ et d'entropie $\Delta S = S_1 - S_0$ en fonction de k .

2)b) On envisage, pour passer de l'état (P_0, V_0) à l'état (P_1, V_1) , deux transformations, une transformation réversible isotherme notée **1**, une transformation réversible notée **2** (représentée sur la figure ci-contre) où la pression évolue linéairement de P_0 à P_1 .

Représenter graphiquement la transformation **1** et en déduire que les travaux échangés

W_1 et W_2 sont tels que $W_1 > W_2$ si $k > 1$.

2)c) Calculer W_1 et W_2 [on montrera que, pour la transformation **2**, $P = -\frac{P_0}{k} \left(\frac{V}{V_0} - k - 1 \right)$] à partir de l'expression du travail des forces de pression; calculer les quantités de chaleur échangées Q_1 et Q_2 ; montrer qu'il existe une relation simple entre Q_1 et ΔS ; pourquoi n'y a-t'il pas de relation simple entre Q_2 et ΔS ?

2)d) Pour la transformation **2**, montrer que la température peut être écrite

$T = \frac{T_0}{k} \left[\frac{V}{V_0} (k+1) - \frac{V^2}{V_0^2} \right]$; calculer, en fonction de k , la température extrême atteinte dans la transformation **2** et la nature de cet extremum.