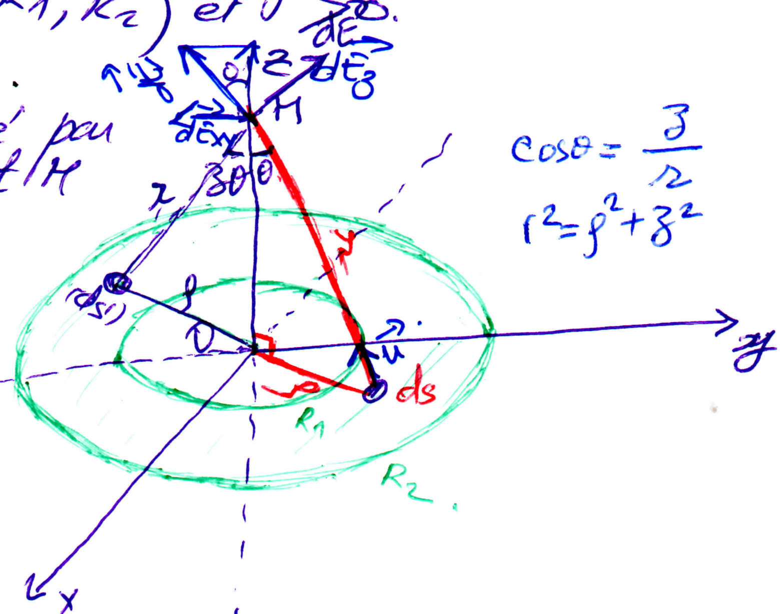
Exo 4 : Disque percé (O, R_1, R_2) et σ.



$\cos\theta = \dfrac{z}{r}$

$r^2 = \rho^2 + z^2$

① Calculons le champ créé par cette distribution au pt M tq $OM = z$.

Tout d'abord il faut étudier la symétrie de la distribution.

Dans notre cas on constate que la distribution possède :

* Un (01) centre de symétrie O(0,0)
* Deux (02) axes de symétrie (X'OX) et (Y'OY).
* Deux (02) plans de symétrie (XOZ) et (YOZ).

D'après ces données visuelles on peut dire que le champ créé par cette distribution est dirigée sur (Oz) : $\vec{E} = E_z \vec{k}$.

Soit un petit élément de surface (ds), distant de O de ρ et distant de M de r. La charge de cet élément est $dq = \sigma ds$, cette charge va créer au point M, un champ élémentaire $\vec{dE}$ tq :

$$\vec{dE} = \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u} = \vec{dE_{xy}} + \vec{dE_z}$$ (une projection suivant Oz et une autre sur (XOY)).

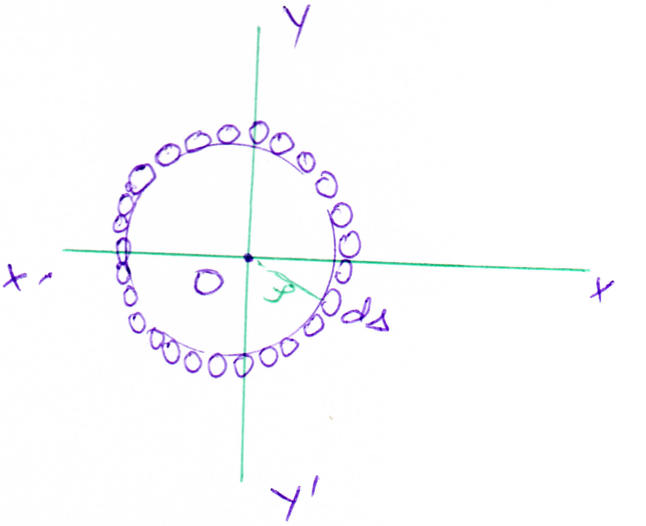
En raison de symétrie, diamétralement opposé à ds, il existe $ds' = ds$ tq : $dq' = dq = \sigma ds$, qui va créer en M un champ élémentaire $\vec{dE'} = \dfrac{k\,dq}{r^2}\vec{u'} = \vec{dE'_{xy}} + \vec{dE_z} = -\vec{dE_{xy}} + \vec{dE_z}$

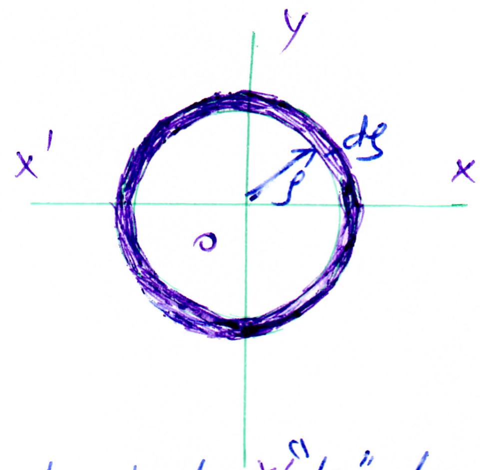
On constate que $\vec{dE} + \vec{dE'} = 2\vec{dE_z}$. (Le champ total est suivant Oz)

Ces 2 éléments vont créer le champ.

On fait la même chose pour tous les éléments qui se trouvent à la même distance ρ de O et r de M.

Dans le plan (xoy) on peut voir:





L'ensemble de ces éléments de surface "ds" forment un anneau de centre O, de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$. Tous ces éléments se trouvent à la même distance de O et de M.

$$dS = 2\pi\rho\, d\rho$$

Sa charge est: $dq = 2\pi\sigma\rho\, d\rho = \sigma . ds$.

Le champ crée par cet élément circulaire est porté par l'axe (Oz). $d\vec{E} = d\vec{E}_z + d\vec{E}_{xy} \Rightarrow \sum d\vec{E} = \sum d\vec{E}_z + \underbrace{\cancel{\sum d\vec{E}_{xy}}}_{\vec{0}}$!

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u} \Rightarrow dE_z = dE.\cos\theta \quad \text{(voir figure)}$$

$$dE_z = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\sigma\, ds}{r^2}\cos\theta = \frac{k\sigma\, 2\pi\rho\, d\rho\, z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = k\sigma\pi z \cdot \frac{2\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

Car $r^2 = \rho^2 + z^2$ et $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$.

Pour décrire la distribution, il faut intégrer sur ρ de R_1 jusqu'à R_2, donc:

$$E = E_z = k\pi\sigma z \int \frac{2\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E = k\pi\sigma z \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

On pose $X = \rho^2 + z^2 \Rightarrow dX = 2\rho\, d\rho$.

Les limites : $\begin{cases} \rho_1 = R_1 \Rightarrow X_1 = R_1^2 + z^2 \\ \rho_2 = R_2 \Rightarrow X_2 = R_2^2 + z^2 \end{cases}$

$$E = k\pi\sigma z \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{X^{3/2}} = k\pi\sigma z \left[-2\frac{1}{\sqrt{X}}\right]_{X_1}^{X_2}$$

$$\Rightarrow E = -2k\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{X_2}} - \frac{1}{\sqrt{X_1}}\right) = 2k\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)$$

Donc $\vec{E}(M) = 2k\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right) \vec{k}$.

2) * Pour un disque normal ($R_1 = 0$ et $R_2 = R$)

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = 2k\pi\sigma z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \vec{k}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = 2k\pi\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \vec{k}}.$$

* Pour un plan infini (disque infini) $\Rightarrow$ $R_1 = 0$ et $R_2 = \infty$.

$$\vec{E}(M) = 2k\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{\underbrace{R_1^2}_{0}+z^2}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}}^{\,0}\right) \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = 2k\pi\sigma \vec{k} = 2k\pi\sigma \vec{k} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k}.$$