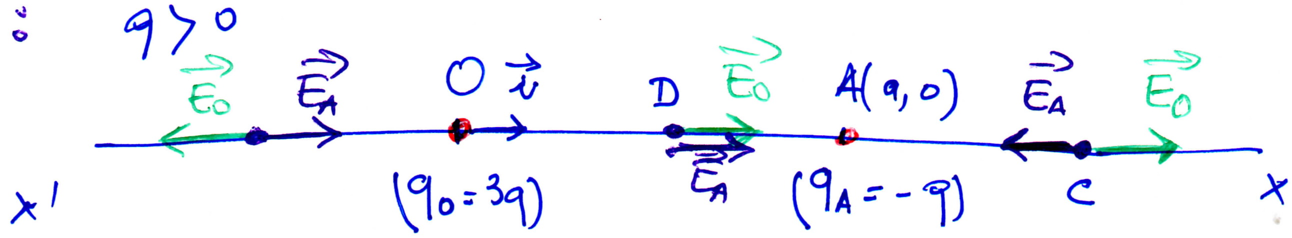
Corrigé de la série 2 (phys. 2 : 2024/2025)

Ex01 : $q>0$



① Détermination du champ dans les 3 régions.

* 1ère région : $x>a$ (ex : point C)

$$\vec{E}_O=\frac{k\,q_O}{x^2}\vec{u}=\frac{3kq}{x^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_A=\frac{k\,q_A}{(x-a)^2}\vec{u}'=\frac{-kq}{(x-a)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_O+\vec{E}_A=kq\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right)\vec{i}.$$

* 2e région : $0<x<a$ (ex : point D).

$$\vec{E}=\vec{E}_O+\vec{E}_A=\frac{3kq}{x^2}\vec{i}+\frac{(-kq)}{(a-x)^2}(-\vec{i})=kq\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)\vec{i}.$$

* 3e région : $x<0$ (exp : point E)

$$\vec{E}=\vec{E}_O+\vec{E}_A=\frac{k\,q_O}{(-x)^2}(-\vec{i})+\frac{k\,q_A}{(a-x)^2}(-\vec{i})=kq\left(\frac{-3}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)\vec{i}$$

② q' est en équilibre $\Rightarrow \sum\vec{F}_i=\vec{0}\Rightarrow\sum\vec{E}_i=\vec{0}$ car $\vec{F}=q\vec{E}$

* $x>a$: $E=0\Rightarrow\frac{3}{x^2}-\frac{1}{(x-a)^2}=0\Rightarrow 3(x-a)^2=x^2$

$\Rightarrow 2x^2-6ax+3a^2=0$

$\Delta=36a^2-24a^2=12a^2=(2a\sqrt{3})^2$

$\Delta>0\Rightarrow$ 2 solutions : $x_1=\frac{6a+2a\sqrt{3}}{2\times2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a>a$

$x_2=\frac{6a-2a\sqrt{3}}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}a<a$

① La solution $x_1>a$ est validée, par contre $x_2<a$ est rejetée.

* $0<x<a$: $\vec{E_0}$ et $\vec{E_A}$ sont dans le même sens $\Rightarrow \vec{E_0}+\vec{E_A}$ est toujours $\neq \vec{0} \Rightarrow q'$ ne peut pas être en équilibre dans cette région.

$$\vec{E}=\vec{0} \Rightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{-1}{(a-x)^2}$$

$$\Rightarrow -x^2=a^2-2ax+x^2 \Rightarrow 2x^2-2ax+a^2=0$$

$\Delta = 4a^2-8a^2=-4a^2<0 \Rightarrow$ pas de solutions.

* $x<0$: $E=0 \Rightarrow \frac{1}{(a-x)^2}-\frac{3}{x^2}=0 \Rightarrow 3(a^2-2ax+x^2)=x^2$

$$\Rightarrow 2x^2-6ax+3a^2=0$$

$\Delta = 36a^2-24a^2=12a^2>0 \Rightarrow$ 2 solutions.

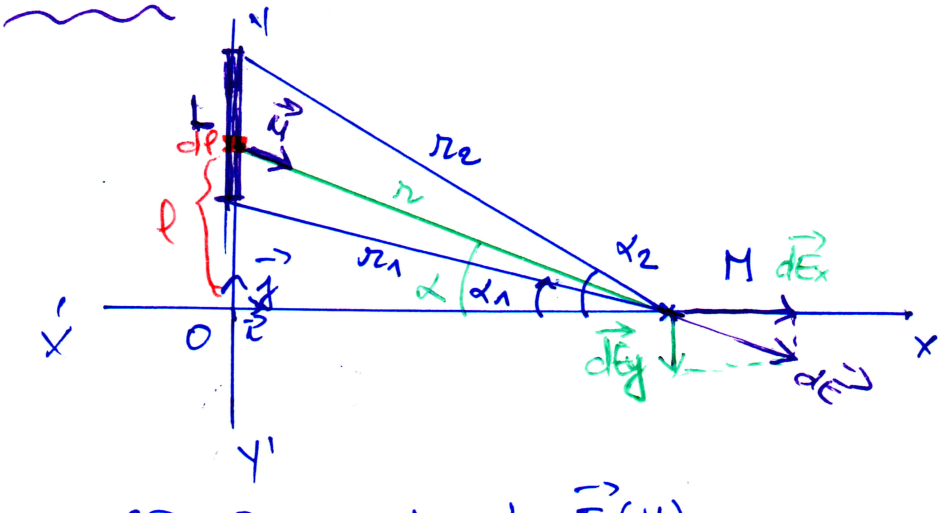
$x_1=\frac{6a+2\sqrt{3}a}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.a>0 \Rightarrow$ solution rejetée

$x_2=\frac{6a-2\sqrt{3}a}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.a>0 \Rightarrow$ solution rejetée

Donc il y a une seule position $(x>a)$ pour laquelle la charge q' pourrait être en équilibre :

$$x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a.$$

Exo 2 : $OM=x$, $x>0$



① Expression de $\vec{E}(M)$.

Pour calculer le champ electrostatique créé par le fil au point M, on ~~va~~ d'abord calculer le champ élémentaire créé par un élément de longueur dl.

Soit un élément dl, distant de l de O, de r de M, et qui fait un angle α avec l'axe des x (figure).

$$dl \longrightarrow dq = \lambda dl \longrightarrow d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} dq = \lambda dl \\ r^2 = l^2 + x^2 \\ \vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j} \end{cases}$$

Donc $d\vec{E} = \dfrac{k\lambda\,dl}{l^2+x^2}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})$

On constate que $\cos\alpha = \dfrac{x}{r} \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{x}{\cos\alpha}}$.

D'autre part : $tg\alpha = \dfrac{l}{x} \Rightarrow l = x\,tg\alpha \Rightarrow \dfrac{dl}{d\alpha} = \dfrac{x}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{dl = \dfrac{x\,d\alpha}{\cos^2\alpha}}$

Finalement : $d\vec{E} = \dfrac{k\lambda\,dl}{r^2}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})$

$$d\vec{E} = \frac{k\lambda\left(\frac{x}{\cos^2\alpha}\right)d\alpha}{\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{d\vec{E} = \frac{k\lambda}{x}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})\,d\alpha.}$$

Pour trouver le champ total, on intègre sur α de α_1 à α_2.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{k\lambda}{x}\left\{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})\,d\alpha\right.$$

$$= \frac{k\lambda}{x}\Big[\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{k\lambda}{x}\left((\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{i} + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \underbrace{\frac{k\lambda}{x}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)}_{E_x > 0}\vec{i} + \underbrace{\frac{k\lambda}{x}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}_{E_y < 0}\vec{j}$$

② $\vec{E}$ pour un fil infini :

Pour avoir un fil infini, il faut étendre α_2 à $+\pi/2$ et α_1 à $-\pi/2$.

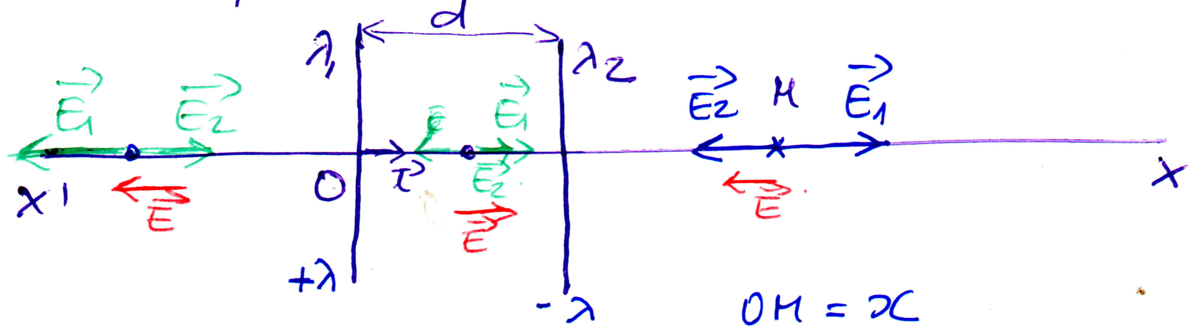
Donc $\vec{E}(M) = \frac{k\lambda}{x}\left(\overset{(1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \overset{(-1)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)\vec{i} + \frac{k\lambda}{x}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(+\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{2k\lambda}{x}\vec{i} + 0\cdot\vec{j} = \frac{2k\lambda}{x}\vec{i} = \frac{2\cdot\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\vec{i}$

On remarque que $\vec{E}$ créé par un fil infini est ~~indépendant~~ $\perp$ au fil et il dépend uniquement de λ et de x (distance qui le sépare du fil).

(3) Soient maintenant 2 plans ($+\lambda$ et $-\lambda$).

Le champ créé par les 2 fils.



$OM = x$

1er cas : $x > d$

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{2k\lambda_1}{x}\vec{i} + \frac{2k\lambda_2}{(x-d)}\vec{i} = \frac{-2k\lambda d}{x(x-d)}\vec{i}$$

2e cas : $x < 0$

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{2k\lambda_1}{(-x)}(-\vec{i}) + \frac{2k\lambda_2}{(d-x)}(-\vec{i})$$
$$= 2k\lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\vec{i} = \frac{2k\lambda d}{x(d-x)}\vec{i}$$

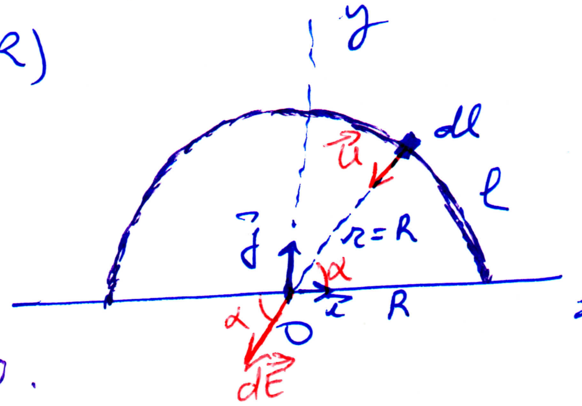
3e cas : $0 < x < d$:

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{2k\lambda_1}{x}(\vec{i}) + \frac{2k\lambda_2}{(d-x)}(-\vec{i})$$
$$= 2k\lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda d}{x(d-x)}\vec{i}}$$

Exo 3 : $\lambda > 0$, Demi-cercle (O, R)

$Q_0 = 2q$ (au pt O)



① Calculons le champ créé par le fil au pt O.

élément dl $\longrightarrow$ de charge $dq = \lambda . dl$ $\longrightarrow$ va créer au point O un champ élémentaire $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{k\lambda dl}{r^2}\vec{u} = \frac{k\,dq}{r^2}\vec{u}$$

avec $dq = \lambda dl$

$r^2 = R^2$

$\vec{u} = -\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}$

Donc $d\vec{E} = \dfrac{-k\lambda dl}{R^2}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$.

or $l = R.\alpha \Rightarrow dl = R\,d\alpha$.

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{-k\lambda R\,d\alpha}{R^2}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

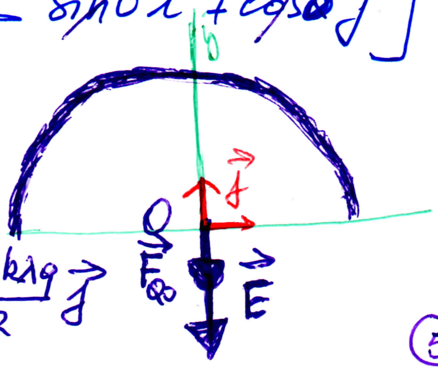
$$d\vec{E} = \frac{-k\lambda}{R}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})\,d\alpha.$$

Pour trouver le champ total, il faut intégrer sur α de $\alpha_1 = 0$ jusqu'à $\alpha_2 = \pi$.

$$\vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})\,d\alpha = \frac{-k\lambda}{R}\left[\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{k\lambda}{R}\left[\underset{0}{\sin\pi}\,\vec{i} - \underset{-1}{\cos\pi}\,\vec{j} - \underset{0}{\sin 0}\,\vec{i} + \overset{1}{\cos 0}\,\vec{j}\right]$$

Donc $\boxed{\vec{E} = -\dfrac{2k\lambda}{R}\vec{j}}$



$\vec{F}_{Q_0}$ et $\vec{E}(O)$ sont dans le même sens

② $Q_0 = 2q$

$\Rightarrow \vec{F}_{Q_0} = Q_0 . \vec{E}(O) = 2q\,\vec{E}(O) = \dfrac{-4k\lambda q}{R}\vec{j}$