Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche Opérationnelle
L2 MA Bejaia 2024/2025

Série de TD N° 2 d'Analyse 4 (Partie 1)

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f_1(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}},\ f_2(x,y)=\frac{\ln x}{\sqrt{x-y}},\ f_3(x,y,z)=\frac{\ln(x+1)}{yz},\ f_4(x,y)=\sqrt{\frac{4}{3}x-x^2-2y-y^2}.$$

Exercice 2. Calculer la limite si elle existe ou montrer qu'elle n'existe pas dans les cas suivants :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2},\ \lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-\frac{1}{2})}\frac{-x+y+y^2+\frac{1}{4}}{x+y+\frac{1}{2}},\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),\ \lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

Exercice 3. Montrer que la fonction suivante n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\ln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Exercice 4.

1. La fonction f est- elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. Montrer que la fonction $g:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y)=\dfrac{\sin x^2-\sin y^2}{x^2+y^2}$ n'est pas prolongeable par continuité au point $(0,0)$.

Exercice 5.

1. Peut-on prolonger par continuité au point $(0,0)$ la fonction suivante, qui est définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{|x|+|y|}$.
2. Peut-on prolonger par continuité au point $(2,0)$ la fonction suivante, qui est définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(2,0)\}$ par $g(x,y)=\dfrac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$.

Exercice 6.

1. Discutez quand $\alpha=2$ et $\alpha=4$, la continuité au point $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha y^2}{|x|^3+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. Trouvez une condition (la plus générale possible) sur α,β et γ pour que g soit continue sur $\mathbb{R}^2$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$