Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche opérationnelle
L2 MA.

Bejaia 2024/2025

Série de TD N° 2 d'Analyse 4 (Partie 2)

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

En quels points f admet-elle des dérivées partielles ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,-1). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Donner les dérivées partielles première de f.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\begin{cases} x^2y^2\sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage du point $(1,-1)$ de la fonction suivante.

$$f(x,y) = 2xy\frac{x+y}{x-y}.$$

Exercice 5. Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = 2x^2 + 4xy^2 + 4y^4 + 4x + 1.$$

1. Calculez le gradient de f, puis déterminer les points critiques de f.
2. Étudier la nature des points critiques.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x,y) = y^2 + xy\ln x.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer la nature de ces points critiques.