

## **Gestion de projets :**

### **Introduction**

Construire un stade, un tunnel, concevoir et commercialiser un nouveau produit, élaborer un système d'information pour une entreprise, organiser un colloque international, sont des activités *a priori* très dissemblables. Les entrepreneurs considèrent eux-mêmes leur situation comme unique, donc non reproductible. Les produits se différencient par leurs caractéristiques physiques, les utilisateurs, les technologies. Leur durée de vie varie selon l'ampleur et l'importance de ces projets.

Pourtant, ces activités ont des points communs. Elles mobilisent des ressources (financières, matérielles, techniques, humaines) souvent éclatées au sein d'une entreprise ou bien entre plusieurs entreprises, sur une période donnée (avec un début et une fin). Ces activités présentent une part de nouveauté et sont donc génératrices de risques : risques techniques (utilisation d'un nouveau matériau, nouveau procédé de fabrication), commerciaux (choix d'un mode de distribution, goût du consommateur), mais aussi organisationnels (faire travailler ensemble des chercheurs et des gens de marketing par exemple) ;

Pour caractériser ces activités, on parle de « projet » et pour évoquer leur gestion, de « management de projet ». Ce dernier ayant connu un développement fulgurant depuis les années 90 continue d'envahir nombre d'entreprises qui considèrent de plus en plus l'innovation (de produits ou services) comme arme stratégique.

### **Définition et caractéristiques des projets :**

Un projet se définit comme un ensemble ponctuel d'activités, non répétitives, comprenant un début et une fin clairement déterminés. De taille et d'ampleur variables, il peut aller d'un projet simple à un projet de grande envergure. La gestion de projet consiste à assurer la réalisation des activités en temps et en heure, dans les limites du budget imparti, et conformément aux spécificités<sup>1</sup>.

La définition du concept projet donnée par AFITEP (Association française pour le management des projets et reprise par AFNOR (association Française de Normalisation) est la suivante : « *une démarche spécifique qui permet de structurer méthodiquement et progressivement une réalité à venir. Un projet est défini et mis en œuvre pour élaborer la réponse au besoin d'un utilisateur, d'un client ou d'une clientèle et il implique un objectif et des actions à entreprendre* »<sup>2</sup>.

Aujourd'hui, la gestion de projet pourrait se définir en recourant, tout simplement, au sens des termes « efficacité » et « efficience ». L'efficacité se mesure par l'écart entre les résultats obtenus et les objectifs poursuivis alors que l'efficience concerne le rendement des ressources

engagées : outputs/inputs. En d'autres termes, l'efficacité se rapporte à l'exécution de la tâche ou du projet le plus rapidement possible, alors que l'efficience renvoie à la même exécution rapide, mais au moindre coût.

De ce qui précède, on déduit qu'un projet présente plusieurs caractéristiques : c'est est une entité qui se satisfait elle-même, contrairement à la plupart des activités quotidiennes des entreprises. La fabrication d'un produit est liée aux prévisions commerciales ou bien aux commandes, aux achats, au transport.

Un projet est unique dans le temps et dans l'espace. Il est daté, marqué par un début et une fin. Il est donc temporaire (cela ne veut pas dire que le projet est caractérisé par une courte durée). Il mobilise des ressources d'une façon ponctuelle, par rapport au fonctionnement de l'entreprise. Il se déroule dans un contexte précis (lieu géographique, cadre juridique, etc.)

Un projet a un caractère extraordinaire, contrairement à d'autres activités comme le processus de production, qui sont répétitives et reproductibles d'un lieu à un autre ; aucun projet ne correspond donc à un autre projet. Il revêt un caractère novateur.

Tout projet est constitué d'une démarche (processus), c'est-à-dire d'un ensemble d'activités qui peuvent être conduites par des individus différents. Le projet aboutit à un résultat : le produit ou le service.

Les méthodes, les outils, les techniques et les principes de la gestion de projet visent à prévenir et à éviter certaines situations en permettant au responsable de gérer convenablement son projet. Nous allons donc présenter dans cette partie les étapes et les jalons qui composent le cycle de vie de la gestion de projet. Il offre au lecteur une vision d'ensemble, de l'idéation du projet à son évaluation.

### **Les principales étapes**

La gestion de projet ne laisse rien au hasard, ou si peu. Elle vise à réduire l'incertitude afférente au projet et doit en anticiper les moindres détails. Ainsi, de manière à éviter d'« omettre », d'« oublier », pire d'« occulter » certaines composantes, la gestion de projet comprend différentes étapes, réalisées et entreprises les unes à la suite des autres.

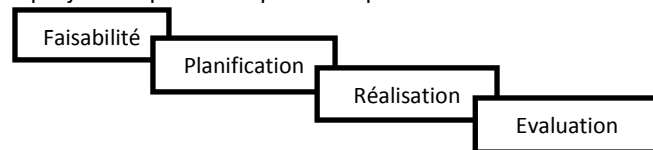
Comme chaque étape est subséquente à une autre, la gestion de projet ne comporte aucune redite, répétition ou redondance à moins qu'un changement ne survienne et que le responsable du projet ne soit forcé de faire marche arrière. La gestion de projet ressemble, en somme, à des dominos : la réalisation de la première étape entraîne l'exécution des autres, dans un ordre généralement linéaire, prévisible et obligatoire.

Ainsi, les spécialistes et les praticiens estiment que le « cycle de vie » ou le « processus » de la gestion de projets comprend différentes étapes imbriquées les unes aux autres. L'ordonnancement proposé par les auteurs ainsi que les différentes appellations sont diverses

<sup>1</sup> Management des projets : L'essentiel des concepts et des pratiques- Stephen Robbins et David DeCenzo, Paris 2008.

<sup>2</sup> Management des nouveaux projets : Panorama des outils et des pratiques, Sandrine Fernez-Walch, AFNOR, 2000.

mais elles présentent des variantes communes. Cependant Yve Théoret retient que le cycle de vie de la gestion de projet comporterait quatre étapes essentielles<sup>3</sup> :



- La « faisabilité » doit permettre au responsable d'évaluer si le projet à l'étude est possible et réalisable, bref « faisable » ou non. Elle permet au responsable du projet de peser et de comparer les avantages et les inconvénients du projet en devenir compte tenu des objectifs ciblés et de sa rentabilité escomptée. La faisabilité, en somme, offre l'occasion de déterminer s'il est possible et avantageux de réaliser le projet avant de l'entreprendre. C'est donc la base pour le démarrage du projet.
- La « planification » permet au responsable d'anticiper, dans les moindres détails, la réalisation du projet. Elle se concrétise sous la forme d'un plan dans lequel on identifie et précise les différentes composantes du projet. La planification ou le plan qui en découle spécifie aussi comment réaliser le projet compte tenu des objectifs et des déterminants arrêtés.
- La « réalisation » découle de la planification. Il s'agit de l'étape pratique du projet, celle qui consiste à exécuter le projet. Elle exige la participation de tous les intervenants. Un contrôle continu est nécessaire, au moyen des étapes jalons, pour s'assurer que la progression du projet se dirige vers la bonne voie. Si l'on constate des déviations, une décision corrective s'impose.
- L'« évaluation », enfin, permet de tirer des conclusions et de consigner les informations et l'expérience acquise lors de l'accomplissement du projet et ainsi de réduire l'incertitude afférente à la réalisation d'autres projets similaires.

Les étapes de faisabilité, de planification, de réalisation et d'évaluation sont précédées ou suivies d'autres composantes, lesquelles engagent, tel un jeu de dominos, l'étape subséquente du cycle de vie de la gestion de projet, et cela jusqu'à la réalisation complète du projet. Genest et Nguyen parlent d'« événements clés » qui séparent chaque phase du processus ou cycle de projet. D'autres encore parlent de « jalons ». Les différentes étapes du cycle de vie de la gestion de projet sont enclenchées lorsque les jalons sont franchis.

### Les acteurs du projet (intervenants)

Un projet implique généralement différents intervenants, dont un propriétaire-client, un responsable et une équipe. L'équipe est composée de plusieurs personnes, aux expertises et connaissances variées. Plus le projet est complexe, plus l'équipe est imposante et plus les acteurs sont nombreux.

La gestion de projet peut être déléguée d'une personne à une autre ou d'une personne à un groupe de personnes. Si tel est le cas, il importe alors de distinguer le propriétaire-client du responsable du projet. Le premier endosse et assume la faisabilité, la planification et la réalisation du projet ainsi que tous les coûts et risques afférents. Le second, soit le responsable du projet, exécute le projet au nom du propriétaire-client. Ces distinctions sont importantes car elles permettent de déterminer de qui, très exactement, dépend le projet. Comme la propriété du projet n'est pas toujours celle du responsable du projet, il est essentiel de bien distinguer les intérêts des uns et des autres (et de cerner leur responsabilité). Ainsi, le propriétaire-client, le responsable du projet et l'équipe ont des tâches, des rôles et des caractéristiques spécifiques.

- 1- **Le propriétaire-client du projet** : il s'agit de la personne qui souhaite ou commande le projet. Il n'est pas rare non plus d'entendre parler d'« initiateur », d'idéateur, de promoteur, de commanditaire ou décideur de projet. Le propriétaire-client a habituellement l'« idée » du projet et dispose des ressources humaines et financières pour le réaliser. C'est lui seul qui assume le risque inhérent au projet. Le propriétaire-client peut réaliser son projet lui-même et ainsi assumer les rôles de propriétaire-client et de responsable. Il peut aussi en confier l'exécution à un responsable à qui il délègue la réalisation de son projet.
- 2- **Le responsable du projet** : comme son nom l'indique, il a la « responsabilité » de gérer le projet du propriétaire-client. Très souvent, nous entendons parler aussi de maître d'œuvre, mandataire chargé ou chef de projet. Le responsable peut administrer l'ensemble du projet ou certaines de ses composantes. Le propriétaire-client n'a pas à lui confier nécessairement, l'ensemble du projet.

Le responsable du projet est, très souvent, un spécialiste, c'est-à-dire un travailleur « qualifié » et un administrateur. Il doit avoir la capacité de mener à bien le projet qui lui est confié. Le propriétaire-client doit donc s'assurer que le responsable a effectivement les capacités et les moyens de ses actions.

- 3- **L'équipe du projet** : le responsable de projet peut avoir à travailler avec différents intervenants. L'envergure et la complexité du projet peuvent exiger des formations académiques et professionnelles variées et multiples. Dans une même équipe, nous pouvons retrouver des spécialistes en ressources humaines, en relations publiques, en construction, en finance, etc. Le responsable du projet voudra s'assurer de bien connaître les avantages et les inconvénients du travail en équipe. Le responsable du projet doit s'assurer que chaque membre de son équipe a les connaissances et compétences requises pour assumer les tâches qui lui incombent et d'assumer pleinement sa responsabilité avec un minimum de supervision. Il doit également s'assurer que les membres de son personnel peuvent effectivement travailler en équipe puisqu'un projet est une « affaire » d'équipe. Toutefois, certaines situations peuvent engendrer des conflits entre les différents intervenants et qui peuvent affecter le déroulement du projet.

<sup>3</sup> Gérer son projet : en sciences humaines et au quotidien, Yve Théoret, Presses Universitaires de Québec, 2004

## Contraintes et déterminants du projet

Conduire un projet c'est fixer un objectif, constituer des ressources, en tenant compte de l'environnement du projet.

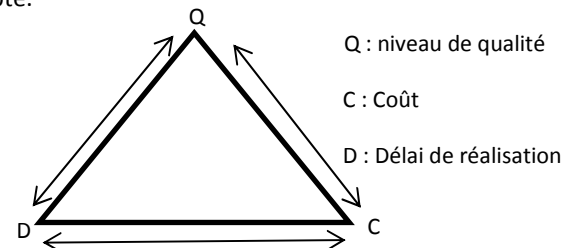
- Fixer un objectif pour le projet : lorsque l'entreprise lance un projet, le résultat à atteindre est un objectif à atteindre. Cet objectif peut prendre des formes variées, répond toujours à un besoin, et doit être clarifié. Il peut être décomposé en plusieurs sous-objectifs. L'objectif peut être matériel ou immatériel, un objet physique, un service, un procédé ou un processus. Face à l'ampleur des projets (ou parfois pour des raisons juridiques), les commanditaires du projet peuvent décider de découper le projet et de confier les sous-projets à des organismes différents. Une attention particulière doit cependant être prêtée pour le mode de découpage qui a des incidences sur la coordination des sous-projets et des ressources.
- Constituer des ressources spécifiques : les ressources à gérer sont les ressources techniques, financières, organisationnelles, humaines, les savoir-faire, mis en jeu dans le projet. On s'est longtemps focalisé sur la gestion des ressources financières et des technologies. La gestion humaine est apparue ensuite, au travers des problèmes d'affectation du personnel (éviter les surcharges des acteurs, les conflits de priorité des projets), de la communication (rôle du coordinateur du projet comme animateur), d'évaluation des hommes. C'est pourquoi, aujourd'hui, quand on parle de ressources, on évoque des savoir-faire, des compétences individuelles, des expertises...
- Des contraintes à respecter : un projet est, comme nous l'avons déjà souligné, unique. Il se caractérise par un délai, un coût, un environnement. Le délai renvoie au problème de temps, qui est une contrainte mais également un levier. Il est une contrainte car il se traduit par une échéance (pénalités de retard pouvant engendrer des surcoûts et mettre en péril le projet). C'est le temps « délai ». Il est aussi un levier, car il aide à structurer un projet (chronologie des tâches, découpage du long terme au court terme). C'est le temps « durée ». Il fait naître un paradoxe, dans la mesure où il est nécessaire d'aller vite, tout en se donnant du temps pour bien faire. Il est un élément stratégique de l'entreprise, source d'avantage concurrentiel.

Le coût du projet renvoie au problème d'argent. L'argent est une contrainte qui se traduit par un budget à respecter (le budget est un référentiel pour mesurer les différences entre l'emploi réel et l'emploi prévu des ressources, un bénéfice à réaliser, un prix à fixer pour le futur produit. C'est aussi une variable du projet. Le coût est la traduction financière d'un investissement ou de l'utilisation d'un matériel, du travail humain, d'une prestation de service. On peut optimiser les coûts d'un projet.

L'environnement du projet désigne la cadre dans lequel le projet est conduit. Le projet se déroule dans les services d'une entreprise, de plusieurs entreprises, dans un contexte économique (de crise ou de croissance), social, géographique (dimension locale, nationale,

internationale), juridique (législation d'un pays). L'interaction du projet avec son environnement doit être prise en compte.

Il faut donc, pour maîtriser la conduite des projets, bien clarifier à la fois les actions qui devront être entreprises et le processus de décision. Ces décisions portent sur un triptyque d'objectifs : qualité, coût et délai.



Le terme coût a longtemps été associé au coût de revient du projet ou au budget du projet. Certains auteurs considèrent que la maîtrise des coûts consiste à maîtriser à la fois le coût de revient du projet et le coût de revient du produit.

Le délai, on l'a précédemment vu, renvoie à l'échéance du projet.

La qualité a longtemps été définie comme les performances ou caractéristiques techniques d'un produit. Les niveaux de performance sont fixés par le concepteur du produit en fonction de ses exigences. Aujourd'hui, la qualité est définie comme l'ensemble des caractéristiques d'une entité qui lui confèrent l'aptitude à satisfaire des besoins exprimés et implicites. Ici, on envisage la qualité sous l'angle de l'utilisateur. En revanche, quand on parle de la maîtrise de la qualité sur un projet, on évoquera l'aptitude du produit à satisfaire son utilisateur et également l'aptitude de la démarche projet, du déroulement du projet à satisfaire le commanditaire du projet.

Maîtriser le triptyque d'objectif, c'est fixer chacun des objectifs du triptyque et s'assurer que chaque objectif est respecté, tout au long du projet. C'est aussi vérifier la cohérence du triptyque et réaliser un compromis entre les trois dimensions. L'idée du compromis est essentielle. Dans la pratique, il est souvent nécessaire d'arbitrer entre les trois dimensions. Dans certains cas, le délai est sacrifié au profit de la qualité, dans d'autres c'est la qualité, au profit des coûts. En somme, la réussite de projets est déterminée par trois types d'objectifs :

- **Technique** : Que faut-il planifier et atteindre ? Quelles fonctions doivent être remplies ? Quel niveau de qualité faut-il atteindre ?
- **Objectifs de coûts** : combien le projet peut-il coûter en tout ?
- **Objectifs des délais** : de combien de temps dispose-t-on ?

Les trois types d'objectifs s'influencent réciproquement. Ils créent des relations concurrentielles, une sorte de « triangle magique ». Si dans un projet, on exige plus de prestation technique, on doit en général s'attendre à des délais de travail plus longs. Des délais de travail plus longs entraînent nécessairement des coûts plus élevés. Sur la base de ces relations, un regard isolé sur les différents objectifs n'aurait pas de sens ! Du fait de ces interactions, il apparaît logique de considérer chacun des objectifs en fonction des autres. C'est pourquoi, les auteurs considèrent que le grand défi du management de projet réside dans l'intégration et la direction de ces objectifs concurrentiels.

## Ordonnement de projet :

- Rappelons qu'un projet est une démarche méthodique qui est mise en œuvre pour atteindre un objectif clairement spécifié, et ce, dans un temps limité.
- Un projet se décompose en un ensemble d'opérations (ou tâches dans le vocabulaire de la gestion de projet) liées par des contraintes de succession. Une tâche nécessite généralement l'utilisation des ressources appropriées pour être réalisée. La gestion de projet a pour objet de coordonner l'exécution des tâches, en assurant l'emploi cohérent des ressources disponibles, afin d'atteindre un objectif voulu dans les délais impartis.
- L'ordonnement du projet réalise le suivi opérationnel du projet : gestion des ressources, suivi de l'avancement, lancement des activités. Techniquement, ordonner un projet consiste à programmer dans le temps l'exécution des tâches tout en respectant les contraintes et de manière à optimiser les critères de performance retenus (Qualité, coûts, Délais). C'est plus particulièrement à ce stade qu'interviennent les techniques de recherche opérationnelle que nous étudierons par la suite.

## Quelques notions

### ▪ Tâches (ou activités) :

On appelle tâches, les activités élémentaires qui doivent s'enchaîner pour atteindre l'objectif. L'inexécution d'une tâche entraîne l'arrêt du projet proprement dit. Pour un projet de grande envergure s'étalant sur plusieurs mois ou années, on pourra se contenter au départ de définir grossièrement les tâches finales (récapitulatives). On se contentera par exemple, de considérer la tâche « poser la toiture », « poser la charpente », « poser les tuiles », etc.

Une tâche se caractérise par un début et une fin, et elle est liée aux autres tâches par une ou plusieurs relations de successions.

### ▪ Ressources

Une tâche requiert généralement certains moyens matériels, financiers, techniques et humains pour être réalisée. On distingue cependant deux types de ressources : on dira qu'une ressource est consommable si elle est consommée lors de la réalisation de la tâche (argent, matériaux). On dira qu'elle est renouvelable lorsque, la tâche achevée, elle redevient disponible pour d'autres tâches (machines, opérateurs, etc.). Lorsque ces ressources sont disponibles en quantité limitée, on sera amené à les partager entre les tâches. On parlera, dans ce cas, d'ordonnement avec ressources.

### ▪ Contraintes :

Les relations de succession et la gestion des ressources limitées en quantité vont induire des contraintes de la gestion de projet. On distingue quatre types de contraintes :

- Les contraintes de succession entre les tâches : elles précisent l'enchaînement des opérations (la logique du projet). Les plus utilisées sont : il faut que la tâche A commence avant que la tâche B puisse commencer (relation Fin-Début). On peut avoir néanmoins des

recouvrements partiels : la tâche B peut commencer quand la tâche A est achevée au 3/4. On trouve aussi de contraintes d'espacement minimal (attente) entre la fin de A et le début de B (contrainte de séchage par exemple).

- Les contraintes de localisation temporelle : elles précisent l'intervalle de temps (ou le semi-intervalle) pendant lequel il est possible de réaliser une tâche. Ces contraintes sont souvent dues à la disponibilité des intervenants (ressources humaines : l'entreprise qui réalise la charpente ne peut intervenir qu'entre le 15 juin et le 31 juillet.

### Remarque :

Nous avons distingué jusqu'ici les contraintes de succession et les contraintes de localisation temporelle. Mathématiquement, les contraintes de succession se traduisent par le fait que le début (ou fin) de la tâche x dépend des débuts (ou fins) de ses prédécesseurs, les contraintes temporelles par le fait que le début (ou fin) de la tâche x dépend d'une constante. Il n'y a pas donc de différence entre ces contraintes. Elles sont regroupées sous le terme de contraintes potentielles.

- Les contraintes disjonctives : une contrainte disjonctive impose la non-réalisation simultanée de deux tâches A et B. on trouve de telles contraintes dans le cas d'utilisation d'une ressource en un seul exemplaire (une grue, une équipe, etc.) ou pour formuler des interdictions de réalisation simultanée pour des raisons de sécurité ou des problèmes de place. Arbitrer une contrainte disjonctive consiste à décider si A se fera avant B ou l'inverse.
- Les contraintes cumulatives : on parle de contraintes cumulatives une partie d'une ou plusieurs ressources disponibles en quantité limitée. Le problème est beaucoup plus combinatoire que les contraintes disjonctives.

Considérons l'exemple où nous avons 5 intervenants et 5 tâches à effectuer. Chaque tâche demande la présence d'un certain nombre d'intervenants comme l'indique le tableau suivant :

Tâches	A	B	C	D	E
Nombre d'intervenants	4	3	2	1	1

Pour que l'ordonnement soit réalisable, il faut qu'on utilise à tout moment, au plus 5 intervenants. Cette contraintes va interdire les ordonnancements réalisant en parallèle : (A//B), (A//C), (A//D//E), (B//D//E). Ces configurations sont minimales au sens que, si (A//B) est interdit, toute configuration contenant (A//B) l'est aussi (par exemple : (A//B//C), (A//B//E), (A//B//C//D), etc.

Lorsqu'une configuration minimale porte sur 2 tâches (ici A//B) ou (A//C), on peut la remplacer par une contrainte disjonctive.

**Les méthodes d'ordonnancement :**

La toute première méthode utilisée en ordonnancement date de l'année 1917. Cette méthode, due à Henri L. Gantt, utilisait des réglettes coulissantes dont les longueurs sont proportionnelles à la durée des tâches. Les diagrammes de Gantt ne sont plus utilisés manuellement, mais demeurent l'outil de visualisation privilégié des ordonnancements. Avec le développement de l'outil informatique dans les années 1950, trois méthodes ont été mises au point à peu près simultanément.

- La méthode P.E.R.T. (Program Evaluation and Review Technic) élaborée à l'origine pour la conception, la fabrication et le lancement de la fusée Polaris ;
- La méthode C.P.M. (Critical Path Method) mise au point pour la compagnie Dupond de Nemours ;
- La méthode des potentiels créée par le français Bernard Roy pour planifier la construction du Paquebot France.

La principale différence entre PERT et les deux autres méthodes, était la prise en compte des durées aléatoires, ce qui permettait de donner des probabilités sur les dates de début et de fin. PERT et CPM représentaient un ordonnancement par un graphe sur lequel une tâche est figurée par un arc, alors que pour la méthode des potentiels, une tâche est figurée par un sommet. Avec le temps, ces méthodes se sont plus ou moins fondues. En France, le terme PERT est utilisée comme synonyme d'ordonnancement de projet, quelle que soit la méthode véritablement utilisée.

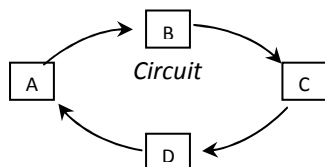
▪ **Ordonnancement et graphe sans cycle**

On se place dans la phase d'ordonnancement du projet. On dispose à ce stade du descriptif de chacune des tâches :

- Renseignements généraux (objectifs, responsable, intervenants, codification) ;
- La durée prévue ou estimée ;
- La liste des contraintes d'antériorité (de précédence) et de succession ;
- Les ressources nécessaires ;
- Eventuellement les coûts, charges.

L'ensemble de ces informations donne lieu à deux niveaux de contrôle et de validation. Le niveau 1 consiste à contrôler la justesse des informations recueillies, notamment qu'aucune tâche ne manque, que les durées ne sont pas surestimées (les sous-estimations se rencontrent peu). Cette validation est humaine. Le niveau 2 consiste à vérifier la cohérence de l'ensemble des fichiers. Pour de petits projets, cette cohérence se vérifie en dessinant le graphe du projet. Le graphe le plus naturel est d'associer un sommet à chaque tâche et de tracer un arc de A vers B si A précède B. Notons cependant qu'un circuit est un parcours qui, partant d'un sommet A, permet de revenir sur ce sommet.

Si le projet est cohérent, le graphe correspondant est un graphe sans circuit. Ces graphes présentent des propriétés simples permettant d'obtenir des algorithmes de calcul efficace.

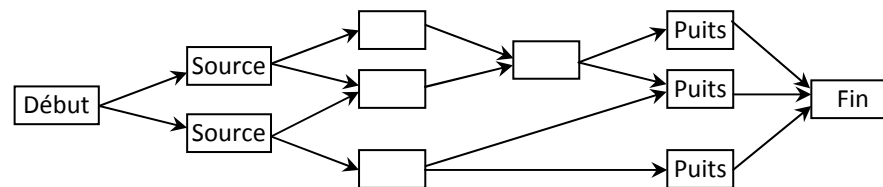


**Propriété 1 :** On appelle « source » un sommet sans prédécesseur et « puits » un sommet sans successeur. Dans un graphe sans circuit, il existe au moins une source et au moins un puits.

**Propriété 2 :** On dira qu'un graphe est normalisé s'il a un sommet source « début » unique et un sommet puits « fin » unique.

Considérons un graphe sans circuit avec plusieurs sources ( $S_1, S_2, \dots, S_k$ ) et plusieurs puits ( $P_1, P_2, \dots, P_g$ ). On peut le normaliser par ajout :

- d'un sommet *début* et des arcs (*début*,  $S_i$ ) ;
- d'un sommet *fin* et des arcs ( $P_j$ , *fin*).

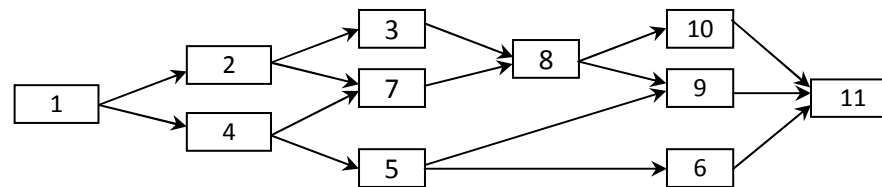


Graphe normalisé

Dans les problèmes d'ordonnancement, le sommet « début » ( $S_i$  : source i début) est la tâche fictive de durée nulle correspondant au démarrage du projet (première pierre) et « fin » la tâche fictive ( $P_j$  : puits fictif j fin) de fin (célébration finale).

**Propriété 3 :** On appelle tri topologique d'un graphe normalisé à n sommets, une renumérotation des sommets de 1 à n telle que :

- numéro (début) = 1 ;
- numéro (fin) = n ;
- pour tout x, pour tout y prédécesseur de x, alors Numéro(x) > Numéro(y).



Un des tris topologiques

La figure précédente donne un tri topologique possible du graphe. Pour un graphe donné, il existe généralement de très nombreux tris topologiques. La méthode que nous donnerons ci-après est la plus utilisée car elle permet tout à la fois de faciliter le dessin du graphe et de trouver un de ces tris.

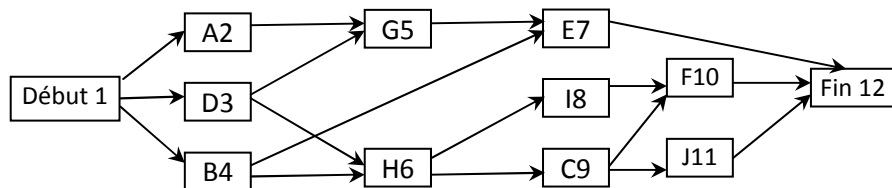
**Exemple d'application :**

Considérons le projet de construction (très simplifié) donné dans le tableau suivant où les tâches ont été codées de A à J :

Tâche	Précédence	Durée	Niveau 1 A-B-D	Niveau 2 G-H	Niveau 3 C-E-I	Niveau 4 F-J
A		2	*	-	-	-
B		2	*	-	-	-
C	H	2	H	H	*	-
D		3	*	-	-	-
E	B-G	4	B-G	G	*	-
F	C-I	2	C-I	C-I	C-I	*
G	A-D	3	A-D	*	-	-
H	B-D	4	B-D	*	-	-
I	H	5	H	H	*	-
J	C	3	C	C	C	*

Au niveau 0, on place le sommet fictif de début de projet. Au niveau 1 sont placées les tâches sans prédécesseurs (A, B et D) en reportant les prédécesseurs des autres tâches. Supprimons maintenant les tâches du niveau 1 (A, B et D) dans la liste des précédences. S'il n'y a pas de circuit, au moins une nouvelle tâche doit se retrouver sans prédécesseurs. Ici, on trouve G et H. On supprime à leur tour G et H. Les tâches C, E et I sont sans prédécesseurs seront placées au niveau 3. Leur suppression fait apparaître F et J et seront placées au niveau 4. En jouant un peu sur le placement des tâches d'un même niveau, on obtient un tri topologique en considérant les tâches niveau par niveau et de bas en haut.

Par la suite, nous supposons que les projets ont été normalisés, et que les tâches ont été numérotées de 1 à n.



Graphique de l'exemple d'application

### Problème fondamental (central) d'ordonnement :

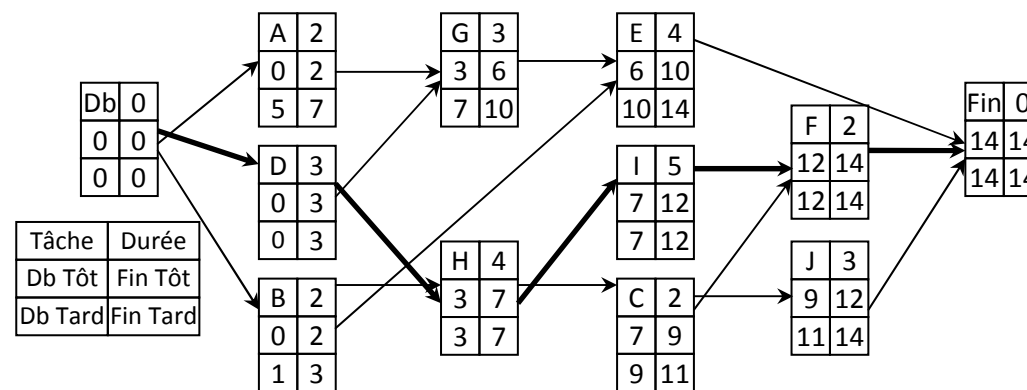
Dans le problème fondamental, les durées des tâches sont parfaitement connues. La date de début est aussi connue. Les seules contraintes que l'on prend en considération sont des contraintes de succession de type : la tâche y doit être achevée avant le début de la tâche x. on notera  $P(x)$  l'ensemble des prédécesseurs de x, et  $S(x)$  l'ensemble des successeurs immédiats de x. Les ressources sont supposées être en quantité suffisante pour ne pas créer de contraintes supplémentaires. L'objectif recherché est de déterminer les périodes de temps pendant lesquelles les tâches doivent être exécutées si l'on veut achever le projet dans un délai minimum ou pour une date donnée.

- Calcul des dates au plus tôt : Une tâche A ne peut pas débuter avant que toutes les tâches T qui la précèdent ne soient achevées. On a donc :

$$DébutPlusTôt(A) = \max\{FinPlusTôt(T), T \in P(A)\}$$

Si les tâches sont indexées selon un tri topologique, l'indice de la tâche A est supérieur aux indices de tous ses prédécesseurs. En considérant les tâches dans l'ordre 1,2,3,...,n on peut calculer l'ensemble des dates au plus tôt en une seule passe.

Reconsidérons l'exemple d'application précédent et admettons que le projet commence à la date 0. On utilisera la figure ci-après pour noter tous les résultats. La tâche fictive de début commence et finit à la date 0. Les tâches A, D et B (premier niveau) commencent à la date 0 et finissent respectivement en dates 2, 3 et 2. G peut commencer quand A et D sont achevées, soit à la date 3. H peut commencer quand D et B sont achevées soit à la date 3. En considérant les tâches de gauche à droite et de bas en haut, on trouve les dates de début et de fin au plus tôt.



Calcul des dates au plus tôt et au plus tard

- Calcul des dates au plus tard : Le calcul des dates au plus tard nous permet d'obtenir la date minimale de fin de projet. Il s'agit de la date à laquelle on voudrait que s'achève le projet. Cette date est généralement égale ou supérieure à la date minimale trouvée. Sinon les contraintes sont très fortes et on sait d'avance que le projet sera en retard.

Si on connaît les dates de début des successeurs de x, il faudra pour respecter ces dates, que x soit achevée avant qu'aucun successeur ne débute. On a donc :

$$FinPlusTard(x) = \min\{DébutPlusTard(z), z \in S(x)\}$$

On va donc considérer les tâches en ordre inverse du tri topologique préétabli. En rappelant les résultats de l'exemple précédent où l'on a trouvé que le projet ne peut s'achever avant la date 14. Pour respecter cette date, la tâche J doit être achevée au plus tard le 14, donc débutera au plus tard le 11 puisque sa durée est de 3. C doit être achevée avant que F et J commencent, soit le 11 (à cause de J), donc débutera au plus tard le 9. En balayant le graphe

de droite à gauche et de bas en haut (ou de haut en bas) on obtient l'ensemble des dates au plus tard.

Sur un petit projet, on parcourt donc le graphe ordonné, une fois de gauche à droite pour calculer les dates au plus tôt et une fois de droite à gauche pour calculer les dates au plus tard. Notons cependant que dans les résultats précédents, les dates correspondent à des débuts de période. Ainsi, la tâche A dure 2 périodes. Si elle commence à la période 0, elle sera exécutée pendant les périodes 0 et 1, elle sera donc achevée en début de période 2 (ou fin période 1). Supposons que les périodes sont en jours et que la date 0 correspond au Dimanche le 10. Dans le langage courant, on dit que A finit le lundi 11 (sous-entendu en fin de journée) et non pas que A finit le mardi à 12 heures. Il faudra en tenir compte dans la présentation des résultats.

### Les marges :

On appelle marge totale (ou simplement marge) la valeur :

$$MargeTotale(x) = DébutPlusTard(x) - DébutPlusTôt(x) \text{ ou } MT(x) = DTA(x) - DTO(x)$$

La marge (MT) représente la latitude que l'on peut prendre sur la tâche x sans affecter la date de fin de projet. On appelle tâche critique une tâche dont les marges sont égales à zéro (on peut à la limite y inclure les tâches dont les marges sont très faibles). On appelle chemin critique tout chemin de *début* à *fin* constitué de tâches critiques. Dans l'exemple précédent, il y a un seul chemin critique, formé par les tâches *Début*, D, H, I, F, *fin*. La longueur du chemin critique est (0+3+4+5+2+0) de 14 correspondant à la plus longue séquence du projet.

Lorsque la marge d'une tâche x est positive, on dispose d'une certaine latitude pour débiter, ou pour augmenter la durée prévue, ou pour jouer sur les deux. Considérons la tâche E. Elle peut commencer entre les dates 6 et 10. Sa marge est de 4. Sa durée prévue est de 4 jours l'entreprise chargée de réaliser cette tâche pourra débiter à la date 8 par exemple et étaler le travail sur 6 jours sans que cela affecte la fin du projet. Si la latitude prise est égale à la marge totale, la tâche correspondante ne dispose plus d'aucune marge et devient par conséquent critique, de même qu'un certain nombre de tâches qui lui succèdent. Si la latitude excède la marge, l'excédent se répercute sur la date de la fin de projet qui est reculée d'autant.

La *marge libre* (ML) d'une tâche x est égale à la différence entre le minimum des débuts au plus tôt des successeurs de x et la fin au plus tôt de la tâche x.

$$MargeLibre(x) = \min\{DébutPlusTôt(z) - FinPlusTôt(x), z \in S(x)\}$$

La marge libre d'une tâche représente la latitude que l'on peut prendre sur cette tâche sans qu'il n'y ait de répercussion sur aucune autre tâche. Un retard supérieur à la marge libre (mais cependant inférieur à la marge totale) se répercute sur les tâches suivantes en diminuant leurs marges (car le début au plus tôt d'au moins un successeur est retardé). Considérons la tâche A de l'exemple précédent. Elle peut commencer entre les dates 0 et 5 sans retarder la fin de projet puisque sa marge totale est de 5. Son seul successeur est G qui peut commencer au plus

tôt à la date 3. Puisque la tâche A nécessite une durée de 2, A peut donc commencer en date 0 ou 1 sans que cela modifie les dates de G. Sa marge libre est de  $1 = (3-2)$ . Par contre si A débute en 2, 3, 4 ou 5 les dates au plus tôt de G et de ses successeurs seront retardées, mais sans que le projet prenne du retard pour autant. De même, la marge totale de la tâche B est de  $1 = (1-0)$ , sa marge libre dépend des débuts au plus tôt de ses successeurs H et E. Sa marge libre est donc égale à  $1 = [\min(3; 6) - 2]$ . On peut donc retarder le déroulement de cette tâche sans autant affecter ni les dates de ses successeurs et ni la date d'achèvement du projet en entier.

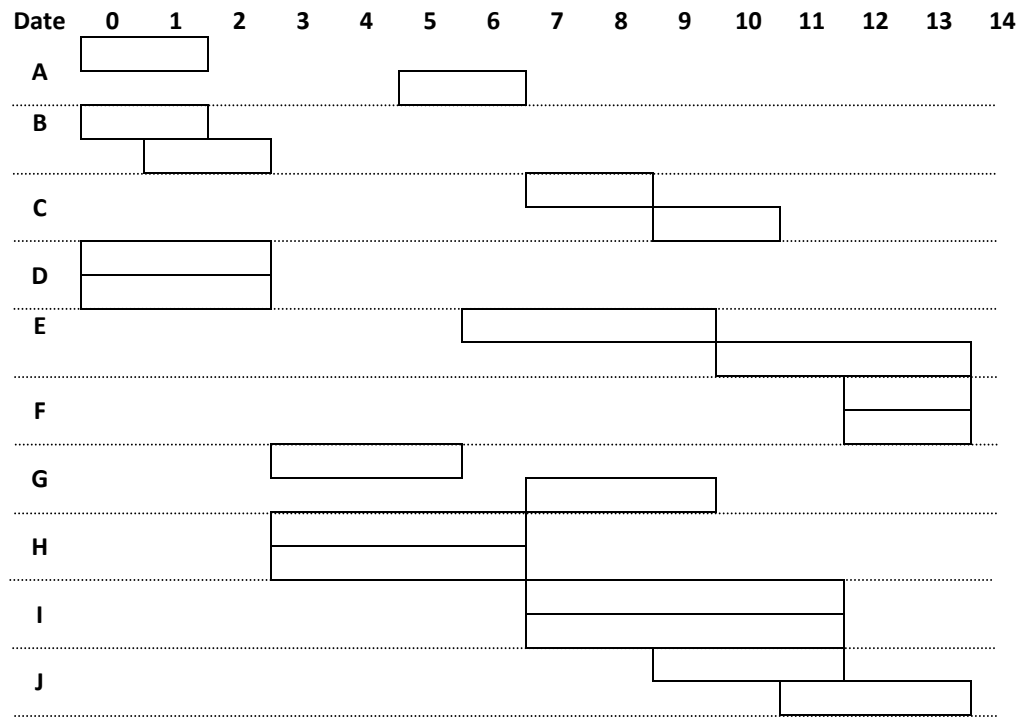
Numéro	Code	Marge totale MT	Marge libre ML
1	Début	0	
2	A	5	1
3	D	0	
4	B	1	1
5	G	4	0
6	H	0	
7	E	4	4
8	I	0	
9	C	2	0
10	F	0	
11	J	2	2
12	Fin	0	

**Remarque :** La marge libre est toujours inférieure ou égale à la marge totale  $ML(x) \leq MT(x)$ .

### Diagramme de Gantt :

Le diagramme de Gantt est un outil utilisé en ordonnancement et gestion de projet et qui permet de visualiser dans le temps les diverses tâches liées par des relations de dépendance composant un projet. Les tâches peuvent s'enchaîner séquentiellement ou bien être exécutées en parallèle. Ce diagramme permet donc de renseigner et situer dans le temps les phases, activités, tâches et ressources du projet. Dans ce diagramme, on représente :  
 - en abscisse (colonnes) les unités de temps (exprimés en mois, en semaines ou en jours) ;  
 - en ordonnée (lignes) les différents postes de travail ou les différentes tâches.

Dans un digramme de Gant, chaque tâche est représentée par un segment (une baguette, un trait, une barre horizontale, etc.) au niveau des lignes dont la longueur est proportionnelle à la durée de la tâche considérée. On peut prendre deux lignes par tâche : une pour les dates au plus tôt et une pour les dates au plus tard. Eventuellement, une troisième ligne pour représenter l'avancement réel des travaux. Au fur et à mesure de l'avancement d'une tâche, la barre représentant le déroulement des travaux est remplie proportionnellement à son degré d'accomplissement. Ce qui permet de détecter les retard (ou avances) occasionnés lors de l'accomplissement des tâches en traçant une ligne verticale.



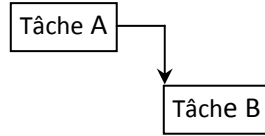
*Diagramme de Gantt de l'exemple*



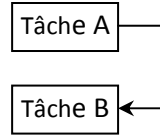
## Prise en considération des différents types de dépendance

On appelle liaison ou dépendance ou lien de dépendance la relation qui unit un prédécesseur à un successeur. Il existe cependant quatre types de liaisons :

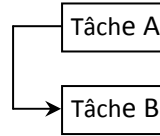
- **FD (Fin à Début)** : c'est le genre de lien le plus courant qu'on a déjà exploité précédemment. La tâche B ne peut commencer tant que la tâche A n'est pas terminée. (les travaux de peinture ne peuvent commencer avant que la construction des murs soit terminée (la Fin de A commande le Début de B).



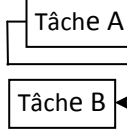
- **FF (Fin à Fin)** : la tâche B ne peut pas terminer tant que la tâche A n'est pas terminée. La tâche B se termine à tout moment une fois la tâche A est-elle-même terminée (la Fin de A commande la Fin de B).



- **DD (Début à Début)** : la tâche B ne peut commencer tant que la tâche A n'a pas débuté. C'est le type de liaison le plus rare (le Début de A commande le début de B). EX. Une fois avoir commencé à préparer le béton, on peut entamer le coulage des fondations.



- **DF (Début à Fin)** : la tâche B ne peut pas terminer tant que la tâche A n'a pas commencé (le début de A commande la fin de B). Exemple, on ne peut pas terminer les travaux de plomberie tant que le chauffagiste n'ait pas commencé à installer les équipements de chauffage.



## Méthode PERT/CPM

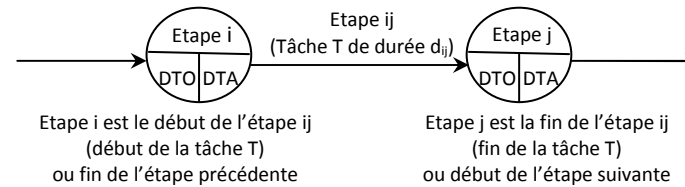
Au cours des années 1957-1958, la marine américaine cherchait à mener rapidement à son terme le projet POLARIS, réalisation simultanée d'un sous-marin lance missile et la fusée adaptée, rendus opérationnels à même date. Ce projet, touchant quelques 250 fournisseurs et plus de 9000 sous-traitants, posait un problème de coordination pour le moins complexe, l'ordonnancement des tâches dépassant les limites habituelles. Les ingénieurs du bureau de planning de la marine mirent alors au point une méthode d'ordonnancement, s'appuyant sur les mathématiques modernes. La méthode PERT était née et devaient selon certains auteurs permettre un gain de deux ans sur la durée de réalisation du projet POLARIS qui nécessitait initialement une durée de sept ans.

### Représentation du réseau PERT :

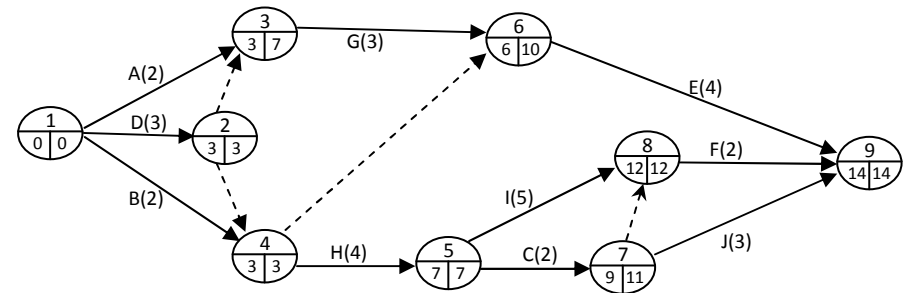
Jusqu'alors, nous avons représenté une tâche par un sommet, en mettant un arc de A à B si A doit être achevée avant B. Dans les méthodes PERT et CPM, on reprend la logique de la méthode de Gantt (une règle par tâche). Une tâche est représentée donc par un arc (dA, fA). Le sommet dA représente le début de la tâche A et le sommet fA, la fin de cette tâche. La longueur de l'arc (dA, fA) correspond à la durée de A. Toutefois, on peut ignorer cette contrainte qui est sans intérêt. Si A doit être achevée avant la date B, on crée un arc fictif en pointillés (fA, dB) de durée nulle.

Pour tracer un graphe plus concis et concentré comme le prévoit la méthode PERT, il convient de supprimer les arcs fictifs inutiles. Pour ce faire, il convient de suivre la démarche suivante :

- Identifier dans le tableau initial, les différents niveaux et les tâches qui y figurent
- Représenter les tâches par des arcs et les événements (jalons) par des nœuds
- A partir de la colonne des prédécesseurs, déduire les tâches divergentes (tâches qui partent depuis le même sommet ou la même étape)
- Construire une colonne où l'on déduit les successeurs de chaque tâche et repérer ainsi les tâches convergentes (tâches qui aboutissent à la même étape)
- Deux nœuds ne doivent être liés que par un seul arc
- Construire les arcs à partir des niveaux ainsi identifiés (tâches antérieure/tâche courante)
- Relier les arcs en se pliant aux contraintes de précédence, utiliser éventuellement des arcs fictifs en pointillés de durée nulle pour respecter les contraintes
- Normaliser le graphe (disposer d'un nœud début unique et d'un sommet fin unique)
- Etablir le tri topologique (numéroter les nœuds de 1 à n)
- Insérer les données comme le montre le schéma suivant :



Le nœud correspond à une étape ou un jalon qui représente un événement important, un repère, qui marque la fin d'une ou plusieurs opérations antérieures et au même temps, c'est le début des opérations postérieures. Cette étape est considérée comme étant une activité ne nécessitant pas de temps ni de ressources et donc de durée nulle.



Graphes PERT/CPM de l'exemple.

NB : dans la méthode PERT, on représente les tâches par les arcs et les événements ou jalons (phases) qui séparent les différentes tâches par des nœuds.

### Calcul des marges (battement)

Marge totale MT(X) : la marge totale représente la plage de temps possible (ou délai maximum) dans laquelle peut se déplacer la tâche sans modifier la date de fin de projet. Les tâches ayant une marge totale égale zéro (ou la plus petite marge) sont considérées critiques.

Technique de calcul :  $MT(X) = FTA(X) - FTO(X)$

Marge libre ML(X) : la marge libre correspond à la plage de temps (ou délai) dans laquelle peut se déplacer librement la tâche sans retarder aucune autre tâche subséquente ; c'est-à-dire sans modifier aucune date de début au plus tôt des tâches qui lui succèdent. Il s'agit donc de la latitude dont dispose le responsable des la tâche pour ne pas affecter le plan de travail des autres.

Technique de calcul :  $ML(X) = \text{Min des Début au plus tôt des tâches immédiatement suivantes} - \text{la fin au plus tôt de la tâche considérée}$ .

La marge libre d'une activité est toujours inférieure ou égale à la marge totale.

La marge indépendante ou certaine mesure l'écart entre le minimum des débuts au plus tôt des successeurs et la fin au plus tard de la tâche ou étape considérée. Il s'agit donc de la latitude dont on dispose sur la tâche sans affecter le début au plus tôt des successeurs même si celle-ci débute au plus tard.

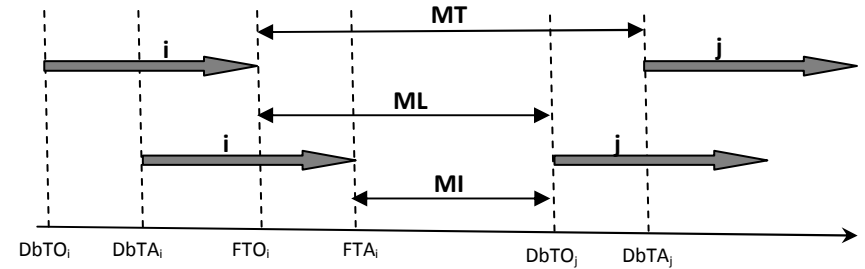
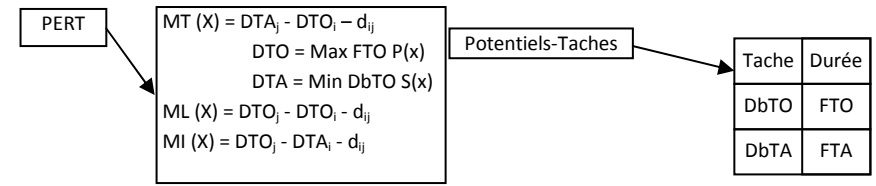
$$\begin{aligned}
 MT(X) &= \text{Marge totale} = FTA(X) - DbTO(X) - d_{ij} \\
 &= FTA(X) - [DbTO(X) + d_{ij}] = FTA(X) - FTO(X) \\
 &= [FTA(X) - d_{ij}] - DbTO(X) = DbTA(X) - DbTO(X) \\
 ML(X) &= \text{Marge libre} = DTO_i - DTO_i - d_{ij} \\
 &= \text{Min } DbTO S(X) - DbTO(X) - d_{ij} = \text{Min } DbTO S(X) - FTO(X) \\
 MI(X) &= \text{Marge indépendantes (certaine)} = DTO_j - DTA_i - d_{ij} \\
 &= \text{Min } DbTO S(X) - DbTA(X) - d_{ij} = \text{Min } DbTO S(X) - FTA(X) \\
 \text{Marge liée} &= \text{Marge totale} - \text{Marge libre} = MT(X) - ML(X)
 \end{aligned}$$

**Remarque :** il est à noter que c'est une aberration de construire, à l'étape de la planification du projet, un réseau avec des marges négatives (la marge négative correspond à un retard). Cependant, en cours de déroulement des travaux, des retards peuvent amener à calculer une date de fin au plus tôt supérieure à la date de fin au plus tard fixée au début du projet. Dans ce cas, des marges négatives apparaissent, elles sont une aide au pilotage du projet.

Il convient de noter aussi que  $MI \leq ML \leq MT$

**Détermination du chemin critique :** le chemin critique fait apparaître sur le réseau, qui formé par la succession des tâches critiques (dont les marges totales sont nulles), nous donne le temps le plus long. On l'appelle critique, car tout retard sur l'une de ces tâches de ce chemin entraîne du retard dans l'achèvement du projet.

- C'est la chaîne des tâches partant du début et aboutissant à la fin telles que les tâches soient critiques.
- C'est le chemin le plus long entre le début et la fin, dans un réseau, il y en a toujours au moins un. Mais il est également possible d'avoir plusieurs chemins critiques.
- La surveillance des activités du chemin critique conditionne la tenue de la planification. La réduction du délai de réalisation d'un projet implique donc des actions sur les activités du chemin critique (affinage de l'enchaînement des tâches ou réduction des durées).

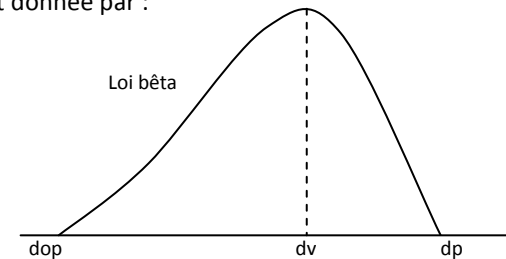


### Pert probabiliste :

Jusqu'à présent, nous avons analysé le problème d'ordonnement en admettant que les durées des tâches sont connues avec certitude. Or, les projets étant par nature peu répétitifs, il est souvent impossible de donner précisément le temps (la durée exacte) d'exécution des tâches. Les responsables préfèrent donner une estimation de la durée que s'engager ferme sur une durée qu'ils ignorent<sup>4</sup>. La méthode retenue par PERT Probabiliste consiste à déterminer pour chaque tâche trois estimations :

- La durée optimiste dop : c'est le meilleur temps que l'on pourrait avoir si tout se passe merveilleusement bien (meilleures conditions d'exécution de la tâche sont réunies) avec une probabilité de 1%
- La durée vraisemblable dv (la plus probable)
- La durée pessimiste dp, qui serait atteinte si tout se passe mal avec une probabilité de 1%.

A partir de ces trois données, on va construire une distribution statistique, que l'on utilisera par la suite. La distribution généralement retenue est la loi bêta qui est définie entre les valeurs dop et dp et présente un maximum en dv. Pour cette loi, la durée moyenne attendue et la variance sont donnée par :



$$\bar{d} = \frac{dop + 4.dv + dp}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{(dp - dop)^2}{36}$$

<sup>4</sup> Recherche opérationnelle et réseaux, Gerd Finke, Lavoisier, 2002.

Ainsi, pour chaque tâche du projet, on calcule la durée moyenne (Temps estimé TE). On retombe donc sur un problème d'ordonnement en univers certain. On calcule l'ordonnement correspondant et on détermine le chemin critique. La durée du projet suit une loi normale dont la moyenne est égale à la somme des durées moyennes des tâches critiques figurant sur le chemin ainsi déterminé et de variance est égale à la somme des variances de ces tâches critiques.

Sans détailler le théorème central limite, deux points essentiels doivent être vérifiés pour que les résultats obtenus soient corrects :

- Les lois régissant les durées des tâches doivent être indépendantes. La disparité des estimations quant aux durées des tâches émanant des différents acteurs d'un projet ne doivent pas être expliquées par les mêmes causes. Sinon, la durée moyenne du projet ne suivra pas la loi normale ;

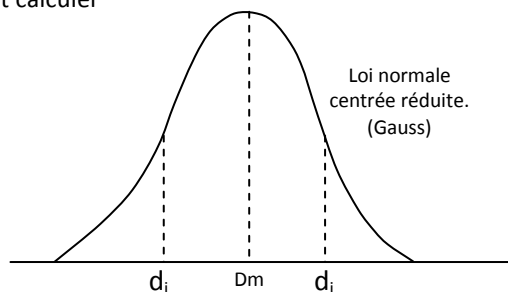
- Le nombre de tâches du chemin critique doit être grand (en théorie une trentaine). Les praticiens descendent à un ordre de grandeur de quinze tâches, ce qui exige tout de même un projet d'ampleur pas moindre.

**Application :**

Pour une loi normale, il y a une probabilité de 99,74 % d'être à plus ou moins trois écarts types. En utilisant la fonction de répartition de la loi normale, on calcule la valeur de  $Z = \frac{X-d_m}{\sigma}$  en sachant que X désigne la date avant laquelle on veut achever le projet,  $d_m$  est la durée moyenne du projet qui est égale à la somme des durées estimées des tâches critiques en se basant sur la loi Bêta et  $\sigma$  est l'écart type (racine carrée de la variance qui est égale à la somme des variances des tâches critiques en question).

Ainsi, en lisant dans la table de Gauss, on peut calculer les probabilités suivantes :

$p(Z < d_i) = F(d_i)$ ,  $z = (d_i - d_m) / \sigma$   
 $p(Z < d_j) = F(d_j)$ ,  $z = (d_j - d_m) / \sigma$   
 $p(d_i < Z < d_j) = p(Z < d_j) - p(Z < d_i) = F(d_j) - F(d_i)$   
 $p(Z > d_j) = 1 - p(Z < d_j) = 1 - F(d_j)$   
 Exemple :  $F(2) = 0,97932$  et  $F(-a) = 1 - F(a)$   
 $F(1) = 0,84134$ ,  $F(-1) = 1 - F(1) = 0,15866$



**Remarques :**

- On peut également calculer les probabilités d'achèvement d'une étape quelconque au même titre que le projet à part entière. Il suffit de déterminer le chemin le plus loin aboutissant à l'étape en question et de repérer ainsi toutes les tâches qui composent cette séquence. On calcule la moyenne et la variance de ces tâches (chemin critique relatif à l'étape considérée) et appliquer ainsi le PERT probabiliste.
- Lors du calcul des marges certaines (indépendantes), on peut aboutir à des nombre négatifs (il se peut en effet que la date de début plus tôt d'un successeur soit inférieure à la date de fin au plus tard d'une tâche). Dans ce cas, la marge certaine est considérée comme nulle (elle n'existe pas).

**Table statistique de la loi normale centrée réduite (Gauss)**

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997